# THEORIE DER FUNCTIONEN

EINER

# COMPLEXEN VERÄNDERLICHEN GRÖSSE.

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER SCHÖPFUNGEN RIEMANN'S

BEARBEITET VON

**DR. H. DURÈGE,**

ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU PRAG.

ZWEITE ZUM THEIL UMGEARBEITETE AUFLAGE.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1873.

LEIPZIG, WALTER WIGAND'S BUCHDRUCKEREI.

# Inhalt.

## Abschnitt IV.

## Integrale mit complexen Variabelen.

## Abschnitt VI.

## Allgemeine Eigenschaften der Functionen.



## Abschnitt VII.

## Ueber das unendlich gross und unendlich klein Werden der Functionen.



### A. Functionen ohne Verzweigungspunkte. Einwerthige Functionen.

### Abschnitt VIII.

## Integrale.

## A. Integrale über geschlossene Linien ausgedehnt.



## B. Integrale über nicht geschlossene Linien. Unbestimmte Integralfunctionen.



## Abschnitt IX.

## Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen.



## Abschnitt X.

## Von den Periodicitätsmoduln.

# Einleitung.

Die Verfolgung der allmäligen Entwickelung der Lehre von den imaginären Grössen bietet besonders deswegen ein grosses Interesse dar, weil man hier noch deutlich erkennen kann, mit welchen Schwierigkeiten die Einführung neuer, vorher nicht bekannter, oder wenigstens nicht hinreichend geläufiger Begriffe verbunden ist. Die Zeiten, in welchen die negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen in die Mathematik eingeführt wurden, liegen uns so ferne, dass wir uns von den Schwierigkeiten, welche auch die Einführung dieser Begriffe früher gehabt haben mag, keine rechte Vorstellung mehr machen können. Ausserdem ist die Erkenntniss des Wesens der imaginären Grössen auch wieder rückwärts für die Erkenntniss der negativen, gebrochenen und irrationalen Grössen lehrreich geworden, da ein gemeinsames Band alle diese Grössen umschlingt.

Bei den älteren Mathematikern herrschte fast durchgängig die Ansicht, dass die imaginären Grössen unmöglich seien. Man begegnet beim Durchblättern älterer mathematischer Schriften immer wieder dem Ausspruche, dass das Auftreten imaginärer Grössen keine andre Bedeutung habe, als die, die Unmöglichkeit oder Unlösbarkeit einer Aufgabe darzuthun, dass diese Grössen keinen Sinn hätten, dass man sich ihrer aber bisweilen mit Nutzen bedienen könne, obgleich die Form der Resultate dann nur eine symbolische sei. In dieser Beziehung ist es interessant, den Entwickelungsgang *Cauchy's* zu beobachten. Dieser grosse Mathematiker ist neben unserem „*Princeps mathematicorum*" *Gauss*, welcher zuerst und wohl schon sehr frühe die hohe Bedeutung der imaginären Grössen für alle Theile der Mathematik erkannte, als Schöpfer der Lehre von den Functionen imaginärer Variabeln zu betrachten. Gleichwohl schloss er sich sowohl in seiner „algebraischen Analysis", als auch in den „Exercices" vom Jahre 1844 noch ganz der Ansicht der älteren Mathematiker an. Es heisst dort an einer

continuer à se servir de ces expressions, qui prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, ne signifient rien et n'ont pas de sens. Le signe $\sqrt{-1}$ n'est en quelque sorte qu'un outil, un instrument de calcul, qui peut être employé avec succès dans un grand nombre de cas pour rendre beaucoup plus simples non-seulement les formules analytiques, mais encore les méthodes à l'aide desquelles on parvient à les établir."

Die imaginären Grössen wurden von den italienischen Algebraikern des 16ten Jahrhunderts in die Mathematik eingeführt, und sind wahrscheinlich zuerst von *Cardano***) erwähnt worden, der sie aber verwirft, weil sie weder positiv noch negativ, und daher von keinem Nutzen seien. *Albert Girard****) nennt sie *quantités enveloppées*. Der Name unmögliche, eingebildete oder imaginäre Grössen findet sich zuerst in der im Jahre 1673 gedruckten Algebra von *Wallis*.

Bei diesen älteren Mathematikern und noch viel später blieb nun, wie bemerkt, die Ansicht herrschend, dass die imaginären Grössen in der That unmöglich seien, dass ihnen wirklich keine Existenz zuzuschreiben sei, und dass ihr Auftreten bei der versuchten Lösung einer Aufgabe lediglich die Unmöglichkeit der Lösung manifestire. Sie wurden fast nur in einer der mathematischen Disciplinen unbeschränkt mit berücksichtigt, nämlich in der Lehre von den algebraischen Gleichungen; hier war es viel zu wichtig, zugleich auf alle Wurzeln Rücksicht zu nehmen, als dass das Imaginärwerden der letzteren den Untersuchungen hätte Stillstand gebieten können. Einzelne Männer, die, wie es scheint, sich mit einer gewissen Vorliebe den imaginären Grössen zuwandten, wie *de Moivre*, *Johann Bernoulli*, die beiden *Fagnano*, *d'Alembert*, *Euler* fanden allmälig die diesen Grössen innewohnenden ausgezeichneten Eigenschaften auf und bildeten ihre Lehre immer mehr und mehr aus. Doch wurden diese Untersuchungen im Ganzen mehr für wissenschaftliche Spielereien, für blosse Curiosa angesehen, und man legte ihnen nur in so fern Werth bei, als sie nützliche Hülfsmittel

*) *Cauchy*, Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome III. p. 361.

**) Artis magnae sive de regulis Algebrae liber unus. 1545.

***) Invention nouvelle en Algèbre. 1629.

brochenen und irrationalen Grössen ausgegangen. Da nämlich die Anwendung dieser mathematischen Begriffe auf Geometrie, Mechanik, Physik und zum Theil selbst im bürgerlichen Leben sich so leicht und so von selbst darbot, ja ohne Zweifel in vielen Fällen die Veranlassung zur Untersuchung dieser Grössen wurde, so kam es, dass man in irgend einer dieser Anwendungen das wahre Wesen dieser Begriffe und ihre wahre Stellung im Gebiete der Mathematik zu finden glaubte. Bei den imaginären Grössen lag nun eine solche Anwendung nicht so nahe, und wegen der mangelnden Kenntniss derselben glaubte man die imaginären Grössen in das Reich der Unmöglichkeit verweisen, ihre Existenz bezweifeln zu müssen. Dabei liess man aber ausser Acht, dass die reine Mathematik, die Wissenschaft der Addition, so wichtig auch ihre Anwendungen sind, doch an und für sich mit den letzteren nichts zu thun hat, dass ihre durch eine vollständige und widerspruchsfreie Definition eingeführten Begriffe in der Definition selber ihre Existenz begründen, und dass ihre Sätze wahr sind, gleich viel, ob man von ihnen eine Anwendung machen kann oder nicht. Ob und wann dieser oder jener Satz eine Anwendung finden wird, lässt sich oft nicht vorherbestimmen, und gerade die heutige Zeit ist ja reich genug an Beispielen, dass sich die wichtigsten, selbst tief in das Leben der Völker eingreifenden Anwendungen an Sätze geknüpft haben, bei deren Entdeckung man sicherlich keine Ahnung von diesen Folgen hatte. So stark war aber allmälig der Glaube an die Unmöglichkeit der imaginären Grössen geworden, dass, als seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts die Idee auftauchte, die imaginären Grössen geometrisch darzustellen**), man nun umgekehrt aus der vermeint-

*) Aussi a-t-on vu quelques géomètres d'un rang distingué ne point goûter ce genre de calcul, non qu'ils doutassent de la justesse de son résultat, mais parce qu'il paraissait y avoir une sorte d'inconvenance à employer des expressions de ce genre qui n'ont jamais servi qu'à annoncer une absurdité dans l'énoncé d'un problème. *Montucla*, Histoire des mathématiques. Tome III. p. 283.

**) Der erste Versuch, die imaginären Grössen geometrisch darzustellen, wurde von *Kühn* im Jahre 1750 gemacht. (Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis. Novi commentarii Acad. Petrop. III ad 1750 et 1751). Obgleich *Montucla* (Histoire des Mathématiques. Tome III. p. 30) meint, es sei nicht der Mühe werth, diese Abhandlung zu lesen,

Die ersten mathematischen Begriffe, die sich unmittelbar aus der Grundoperation der Mathematik, der Addition, ergeben, sind diejenigen, die man nach dem heutigen Sprachgebrauche positive ganze Zahlen nennt. Geht man von der Addition zu ihrer Umkehrung, der Subtraction, über, so stellt sich alsbald die Nothwendigkeit ein, neue mathematische Begriffe einzuführen. Sobald nämlich die Aufgabe entsteht, eine grössere Zahl von einer kleineren zu subtrahiren, so kann dieselbe nicht mehr durch eine positive ganze Zahl gelöst werden. Auf einem Standpunkte, auf dem man nur positive ganze Zahlen kennt, hat man daher die Alternative, entweder eine solche Aufgabe als unmöglich, als unlösbar zu bezeichnen, und damit dem Fortschritt der Wissenschaft nach dieser Richtung hin eine Schranke zu setzen, oder aber die Möglichkeit der Auflösung jener Aufgaben dadurch herbeizuführen, dass man solche mathematischen Begriffe*), welche die Aufgabe zu lösen vermögen, als neue Begriffe einführt. Auf diese Weise entstehen durch die Subtraction die negativen Grössen als Differenzen zunächst zweier positiver ganzer Zahlen, von denen der Subtrahendus grösser ist, als der Minuendus. Ihre Existenz und Bedeutung für die reine Mathematik ist dann nicht etwa in einem Gegensatze zwischen Rechts und Links, Vorwärts und Rückwärts, Bejahung und Verneinung, Vermögen und Schulden oder in irgend einer ihrer mannigfaltigen Anwendungen begründet, sondern lediglich in der Definition, durch welche sie eingeführt werden.

Wenngleich nun aber in rein begrifflicher Beziehung in den negativen Grössen nichts Unmögliches liegt, so kann es sich doch

---

so ist neben manchem Unrichtigen doch die Idee darin schon ausgesprochen, dass man unter $a\sqrt{-1}$ eine Gerade zu verstehen habe, welche auf der Geraden $a$ senkrecht steht und mit ihr gleiche Länge hat. Uebrigens scheint *Kühn* ein sonderbarer Kauz gewesen zu sein. Wenigstens theilt *Montucla* (a. a. O.) einige höchst eigenthümliche Ansichten desselben mit. Wenn aber Jemand in der damaligen Zeit auf die Idee kommen konnte, die für unmöglich gehaltenen imaginären Grössen geometrisch darstellen zu wollen, so dürfte man sich nicht wundern, wenn er ein Mann war, der am Sonderbaren Geschmack fand.

*) *Foncenex*, Reflexions sur les quantités imaginaires. Miscellanea Taurinensia. Tome I. p. 122.

einen 8 mehr befinden, als in der andern, so ist darin folgende rein mathematische Aufgabe enthalten: zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich 6, und deren Differenz gleich 8 sei. Wird nun nur verlangt, dass diese Zahlen mathematische Begriffe seien, ohne dieselben auf eine besondere Art von mathematischen Begriffen zu beschränken, und sind ferner vorher die negativen Grössen durch ihre Definition begrifflich festgestellt worden, so liegt die Lösbarkeit der rein mathematischen Aufgabe auf der Hand; wie Jeder sieht, sind die positive Zahl 7 und die negative Zahl — 1 diejenigen Grössen, welche der Aufgabe genügen. Nichts desto weniger ist die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen unmöglich, denn in derselben wird verlangt, dass jede der gesuchten Zahlen eine Anzahl bedeuten soll, also nothwendig positiv sein muss. Läge nun die Unmöglichkeit nicht so offen da, wie bei diesem einfachen Beispiele, so würde das Auftreten der negativen Zahl — 1 die Unlösbarkeit der Aufgabe zu Tage bringen.

Ganz dieselben Umstände treten nun bei jeder andern indirecten Operation auf's Neue ein. Die nächste indirecte Operation ist die Division. Stellt man die Aufgabe, eine ganze Zahl in eine andere zu dividiren, welche nicht ein Vielfaches der ersteren ist, so entsteht die Unmöglichkeit, diese Aufgabe durch positive oder negative ganze Zahlen zu lösen. Der Fortschritt der Wissenschaft erfordert also wieder, die Möglichkeit der Lösung dadurch herbeizuführen, dass man die dazu nöthigen Grössen einführt und begrifflich feststellt. Diese neuen Begriffe sind hier die rationalen Brüche. Aber auch hier kann der Fall eintreten, dass das Auftreten derselben die Unmöglichkeit der Lösung einer Aufgabe kundgiebt, nämlich wiederum dann, wenn die Natur der Aufgabe die Lösung durch die neuen Begriffe nicht gestattet. Als ein Beispiel diene folgende Aufgabe: Durch ein in einer Maschine oder einem Uhrwerke befindliches Rad, welches 100 Zähne besitzt und in der Minute einmal umläuft, soll unmittelbar ein anderes Rad so in Bewegung gesetzt werden, dass dieses 12 Mal in der Minute umläuft; man fragt, wie viele Zähne man dem letzteren Rade geben muss. Die hier zu Grunde liegende rein mathematische Aufgabe besteht einfach darin, 100 durch 12 zu dividiren, und sind die Brüche einmal begrifflich festgestellt worden, so hat die Auflösung keine Schwierigkeit, sie liefert $8^1/_3$. Das Auftreten dieses Bruches aber zeigt zugleich die Unmöglichkeit an, die ursprünglich gestellte Auf-

wo $n$ eine positive ganze Zahl bedeute, so ist die Aufgabe, eine dieser Gleichung entsprechende Grösse $x$ zu finden, durch ganze Zahlen oder rationale Brüche nicht mehr lösbar, sobald $a$ nicht die $n$te Potenz einer solchen Grösse ist. In diesem Falle tritt also wieder die Nothwendigkeit ein, die Aufgabe durch Einführung neuer Begriffe lösbar zu machen. Ist nun entweder $a$ positiv, oder wenn $a$ negativ ist, $n$ eine ungerade Zahl, so sind die neu einzuführenden Begriffe die irrationalen Grössen; ist aber $a$ negativ und zugleich $n$ eine gerade Zahl, so entstehen als neue Begriffe die imaginären Grössen. Es liegt nun ebenso wenig die Unmöglichkeit vor, diese letzteren begrifflich festzustellen, wie die irrationalen Grössen oder wie früher die rationalen Brüche und die negativen Grössen, denn bei keiner der hier aufzustellenden Definitionen stösst man auf einen inneren Widerspruch. Wenn ein solcher einträte, wenn Eigenschaften mit einander in Verbindung gesetzt würden, von denen bewiesen werden kann, dass sie nicht mit einander bestehen können, dann allerdings hätte man es wirklich mit etwas Unmöglichem zu thun. *Gauss* *) führt als ein Beispiel einer solchen Unmöglichkeit ein ebenes rechtwinkliges gleichseitiges Dreieck an. In der That wird bewiesen, dass ein ebenes gleichseitiges Dreieck nicht zugleich rechtwinklig sein kann. Hier läge also wirklich etwas Unmögliches vor.

Wenn nun schon das Auftreten von negativen Grössen oder von Brüchen bisweilen die Unmöglichkeit einer Aufgabe kund giebt, so ist leicht begreiflich, dass diese auch durch imaginäre Grössen angezeigt werden kann, wie in folgendem Beispiel: Eine gegebene Gerade von der Länge 2 soll in zwei solche Theile getheilt werden, dass das aus ihnen gebildete Rechteck den Inhalt 4 habe. Der rein mathematische Inhalt dieser Aufgabe ist, zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich 2, und deren Product gleich 4 ist. Wird nun nur verlangt, dass diese Zahlen mathematische Grössen seien, ohne näher anzugeben, welcher Art sie sein sollen, so hat die Auflösung, nachdem die imaginären Grössen einmal begrifflich

---

*) Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. (Inaug. Diss.) pag. 4. Note.

sind. Nimmt man aber auf die ursprüngliche Aufgabe Rücksicht, wonach die gesuchten Grössen Theile einer geraden Linie bedeuten sollen und daher reelle Grössen sein müssen, dann ist die Aufgabe zu lösen unmöglich, weil das grösste aus zweien Theilen der Linie 2 gebildete Rechteck den Inhalt 1 hat, und daher keines den Inhalt 4 haben kann;, und diese Unmöglichkeit wird hier durch das Auftreten imaginärer Grössen angezeigt. *Montucla* *) hat dies nämliche Beispiel als Beleg für die Ansicht gewählt, dass in der Unmöglichkeit einer Aufgabe überhaupt die Bedeutung und Entstehung der imaginären Grössen zu suchen sei, indem sie dann aufträten, wenn man eine Aufgabe stelle, welche eine unmögliche oder absurde Forderung enthalte. Wir haben gesehen, dass ganz dasselbe auch von den negativen Grössen und den Brüchen behauptet werden könnte, und die Worte: „Ainsi toutes les fois que la résolution d'un problème conduit à de semblables expressions et que parmi les différentes valeurs de l'inconnue il n'y en a que de telles, le problème, ou pour mieux dire, ce qu'on demande est impossible." und weiterhin: „Le problème, qui conduirait à une pareille équation, serait impossible ou ne présenterait qu'une demande absurde" lassen sich fast wörtlich auf die beiden früher angeführten Beispiele anwenden, in denen die Unmöglichkeit der Aufgabe durch eine negative Zahl und durch einen Bruch angezeigt wurde.

Aus den vorigen Erörterungen erhellt, dass die imaginären, die irrationalen, die rational gebrochenen und die negativen Grössen eine gemeinsame Entstehungsart haben, nämlich durch die indirecten Operationen, bei welchen ihre Einführung durch den Fortschritt der Wissenschaft nothwendig gemacht wird. Sie alle finden ihre Existenz in ihrer Definition begründet, welche bei keiner etwas Unmögliches in sich schliesst; bei allen aber kann es Fälle geben, wo ihr Auftreten wegen der besonderen Natur der Aufgabe die Unmöglichkeit, diese zu lösen, kund giebt.

Ehe wir nun zu unserem eigentlichen Gegenstande übergehen, sei noch eine Bemerkung über das Rechnen mit den imaginären Grössen erlaubt. Auch hier können wir wieder an die ihnen verwandten Grössen anknüpfen. Jedesmal, wenn in die Mathematik ein neuer Begriff eingeführt wird, ist es an und für sich in vieler

*) Histoire des mathématiques. Tome III. pag. 27.

… unter einer Potenz mit einem negativen Exponenten zu verstehen habe. An und für sich ist dieses ganz willkürlich, indem es nichts giebt, was uns zwingt, etwas Bestimmtes darunter zu verstehen. Allein, wenn man hier und in allen ähnlichen Fällen ganz willkürlich verfahren wäre und sich nicht an eine bestimmte Norm gebunden hätte, so würde das mathematische Gebäude gewiss eine seltsame, die Uebersicht gewaltig erschwerende Gestalt erhalten haben. Die äussere Consequenz und die harmonische Uebereinstimmung in allen ihren Theilen verdankt die Mathematik der Befolgung des Grundsatzes, dass man jedesmal, wenn man einen neu eingeführten Begriff den früher bekannt gewordenen Operationen unterwirft, die von diesen Operationen geltenden Hauptsätze auch dann noch als fortbestehend annimmt, wenn man jene auf die neuen Begriffe überträgt. Diese an und für sich willkürliche Annahme ist so lange zu machen erlaubt, als daraus nicht Widersprüche entstehen.*) Wenn nun dieser Grundsatz befolgt wird, dann sind die Definitionen, von denen oben die Rede war, nicht mehr willkürlich, sondern ergeben sich als nothwendige Folge jenes Grundsatzes. Bei den Potenzen wird z. B. bewiesen, dass, wenn $m$ und $n$ zwei positive ganze Zahlen sind, und $m > n$ angenommen wird,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ist. Nun wird willkürlich festgesetzt, dass dieser Satz auch dann noch richtig bleibe, wenn $m < n$, also $m - n = -p$ eine negative Zahl ist; und dann folgt, dass man

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

zu setzen habe, wodurch die Bedeutung einer Potenz mit einem negativen Exponenten nun bestimmt festgestellt ist.

Dass der obige Grundsatz, trotzdem dass seine Annahme durchaus nicht nothwendig, sondern willkürlich ist, für die Mathematik die grösste Wichtigkeit besitzt, bedarf wohl keiner näheren Auseinandersetzung. Man braucht sich nur zu vergegenwärtigen,

---

*) Dies ist dasselbe, was später von *Hankel* als das Princip der Permanenz der formalen Gesetze bezeichnet worden ist. (Vorlesungen über die complexen Zahlen. Th. 1. pag. 11.)

stattfindende Allgemeingültigkeit der mathematischen Sätze lässt auch eine andre Erscheinung in der Geschichte der Mathematik begreifen, nämlich die eine Zeit lang so weit auseinandergehenden Ansichten über die Bedeutung der divergenten Reihen. Da man gewohnt war, fast alle mathematischen Sätze als allgemein gültig zu betrachten, so bedurfte es längerer Zeit, bis die Ueberzeugung durchdrang, dass bei den Reihenentwickelungen die Resultate nur unter gewissen beschränkenden Bedingungen Geltung haben, und dass überhaupt bei der Einführung des Unendlichen in die Mathematik jener Grundsatz nicht so unbedingt zur Anwendung gebracht werden darf, wie sonst.

Bei der Uebertragung der mathematischen Operationen auf die imaginären Grössen findet nun aber der obige Grundsatz volle Anwendung, und es ist vollständig nachgewiesen, dass dabei keinerlei Widersprüche eintreten. Es liegt nicht in der Absicht, diesen Nachweis hier zu wiederholen; erwähnt mag aber werden, dass jener Grundsatz, obwohl sonst stets befolgt, doch gerade bei den imaginären Grössen nicht von jeher und allgemein anerkannt wurde. Noch zu *Euler's* Zeit waren die Mathematiker gar nicht darüber einig, was man unter dem Product zweier Quadratwurzeln aus negativen Grössen zu verstehen habe. *Euler* selbst setzte obigem Grundsatze gemäss, und wie jetzt allgemein angenommen wird, wenn $a$ und $b$ zwei positive Grössen bedeuten,

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab},$$

also das Product dieser beiden imaginären Grössen einer reellen Grösse gleich. Dies wurde aber nicht allgemein anerkannt, vielmehr glaubte *Emerson*, ein englischer Mathematiker, dass man annehmen müsse, es sei

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-ab},$$

weil es absurd sei, anzunehmen, dass das Product zweier unmöglicher Grössen nicht auch unmöglich sei; und *Hutton* sagt in seinem mathematischen Wörterbuche*), dass zu seiner Zeit die Ansichten der Mathematiker hierüber ziemlich gleich getheilt seien.

*) *Hutton*, Mathematical dictionary. 1796.

* * *

$$z = x + iy$$

bringen, in welcher $x$ und $y$ reelle Grössen bedeuten. Eine Grösse von dieser Form hat *Gauss* eine complexe Grösse genannt,**) indem er diesen Namen der allgemeinen Bedeutung, wonach derselbe eine irgend wie aus ungleichartigen Theilen zusammengesetzte Grösse bezeichnete und in dieser Bedeutung früher hie und da angewendet wurde, entkleidete und ihn zur Bezeichnung der besonderen ungleichartigen Zusammensetzung verwendete, bei welcher eine Grösse aus einem reellen und einem imaginären Theile, die durch Addition verbunden sind, besteht.

Die complexen Grössen umfassen zugleich die reellen mit, nämlich in dem Falle, dass die reelle Grösse $y$ den Werth Null hat. Wenn dagegen die andre reelle Grösse $x$ gleich Null ist, also $z$ die Form

$$z = iy$$

hat, pflegt man die complexe Grösse rein imaginär zu nennen.

Wenn in der Grösse $z = x + iy$ die beiden reellen Grössen $x$ und $y$, oder mindestens eine von ihnen, veränderlich ist, so nennt man $z$ eine complexe veränderliche Grösse. Damit eine solche den Werth Null erhalte, ist erforderlich, dass beide reelle Grössen $x$ und $y$ zugleich verschwinden, weil es nicht möglich ist, dass sich die beiden ungleichartigen Grössen, die reelle, $x$, und die imaginäre, $iy$, gegenseitig aufheben. Dagegen genügt es zum Unendlichwerden der complexen Grösse $z$, wenn nur einer ihrer beiden reellen Bestandtheile, $x$ oder $y$, unendlich wird. Ebenso tritt in $z$ eine andere Unterbrechung der Stetigkeit ein, sobald nur eine der reellen Grössen $x$ oder $y$ eine solche erleidet. So lange aber $x$ und $y$ beide sich stetig ändern, nennt man auch $z$ eine stetig veränderliche complexe Grösse.

Schon die Betrachtung der reellen Veränderlichen und ihrer Functionen wird durch die geometrische Darstellung derselben wesentlich erleichtert und anschaulich gemacht. Dies ist nun in

---

*) Die erste Stelle, in welcher diese Bezeichnung angewendet ist, findet sich: Disquisitiones arithmeticae. Sect. VII. Art. 337.

**) Theoria residuorum biquadraticorum. Comment. societatis Gottingensis. Vol. VII (ad 1828—32) pag. 96.

# Erster Abschnitt.

## Geometrische Darstellung der imaginären Grössen.

### § 1.

Um sich von einer reellen veränderlichen Grösse ein geometrisches Bild zu machen, denkt man sich bekanntlich einen Punkt, der sich auf einer geraden Linie bewegt. Auf derselben, die wir die $x$-Axe oder auch die Haupt-Axe nennen wollen, nimmt man einen festen Punkt $o$ (den Nullpunkt) an und stellt den Werth einer veränderlichen Grösse $x$ durch den Abstand $\overline{op}$ eines auf der $x$-Axe liegenden Punktes $p$ vom Nullpunkte $o$ dar. Dabei nimmt man zugleich auf die Richtung, in welcher die Strecke $\overline{op}$ von $o$ aus gerechnet liegt, Rücksicht, indem ein positiver Werth von $x$ durch eine Strecke $\overline{op}$ nach der einen Seite (etwa nach rechts, wenn man sich die $x$-Axe horizontal liegend denkt), ein negativer Werth von $x$ dagegen durch eine Strecke $\overline{op'}$ nach der andern Seite (nach links) repräsentirt wird. Wenn nun $x$ seinen Werth ändert, so ändert sich auch die Strecke $\overline{op}$, indem der Punkt $p$ seine Lage auf der $x$-Axe ändert. Man kann daher entweder sagen, dass durch jeden Werth von $x$ die Lage eines Punktes $p$ auf der $x$-Axe gegeben ist, oder dass durch ihn die Länge einer begrenzten Geraden in einer von zwei einander direct entgegengesetzten Richtungen bestimmt wird.

Eine complexe veränderliche Grösse $z = x + iy$ hängt nun von zwei gänzlich von einander unabhängigen reellen Veränderlichen $x$ und $y$ ab. Zur geometrischen Verbildlichung einer complexen Grösse wird daher ein Gebiet einer Dimension, eine gerade Linie, nicht mehr ausreichen, sondern es wird dazu eines Gebietes von zwei Dimensionen, einer Ebene, bedürfen. Man kann nun die Art der Veränderlichkeit einer complexen Grösse dadurch wiedergeben, dass man annimmt, es werde durch einen complexen Werth $z = x + iy$ ein Punkt $p$ der Ebene in der Weise bestimmt, dass

seine rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf zwei in der Ebene fest angenommene Coordinaten-Axen die Werthe der reellen Grössen $x$ und $y$ haben. Zuerst nämlich schliesst diese Darstellungsweise die der reellen Veränderlichen in sich, denn sobald $z$ reell, also $y = 0$ ist, liegt der darstellende Punkt $p$ auf der $x$-Axe. Es können sich ferner die Coordinaten des Punktes $p$ gerade wie die veränderlichen Grössen $x$ und $y$, jede von der anderen ganz unabhängig ändern, sodass der Punkt $p$ seine Lage in der Ebene nach allen Richtungen hin ändern kann. Es kann auch eine der beiden Grössen $x$ und $y$ constant bleiben, während nur die andere ihren Werth ändert, in diesem Falle würde der Punkt $p$ eine der $x$- oder der $y$-Axe parallele Gerade beschreiben. Endlich ist auch umgekehrt für jeden Punkt der Ebene der zugehörige Werth von $z$ vollständig bestimmt, da durch die Lage des Punktes $p$ seine beiden rechtwinkligen Coordinaten, also auch die Werthe von $x$ und $y$ gegeben sind.

Statt die Lage des die Grösse $z$ darstellenden Punktes durch rechtwinklige Coordinaten $x$ und $y$ zu bestimmen, kann dies auch durch Polarcoordinaten geschehen. Setzt man nämlich

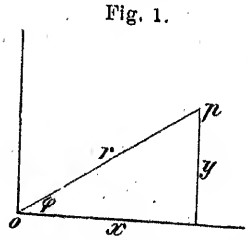
$$x = r \cos \varphi \qquad y = r \sin \varphi,$$

so folgt

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

Alsdann giebt die reelle und stets positiv zu nehmende Grösse $r$, welche der **Modul** der complexen Grösse $z$ genannt wird, die absolute Länge der Strecke $\overline{op}$ (Fig. 1), und $\varphi$ die Neigung derselben gegen die Hauptaxe an. Man kann daher auch sagen, dass eine complexe Grösse $r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ eine gerade Linie **ihrer Länge und Richtung** nach darstellt, nämlich eine gerade Linie, deren Länge $= r$ ist, und die mit der Hauptaxe einen Winkel $= \varphi$ bildet. Die von diesem Winkel, also von der Richtung allein abhängige Grösse

Fig. 1.




$$\cos \varphi + i \sin \varphi$$

pflegt dann der **Richtungscoefficient** der complexen Grösse $z$ genannt zu werden.

Ebenso wie beliebig liegende begrenzte gerade Linien ohne Rücksicht auf ihre Richtung und Lage in der Ebene, oder höchstens mit Berücksichtigung von einander direct entgegengesetzten Richtungen durch reelle Zahlen ausgedrückt werden, so können nun durch complexe Zahlen gerade Linien ausgedrückt werden, welche sowohl ihrer Länge als auch ihrer Richtung nach bestimmt sind,

auf deren Lage in der Ebene es aber weiter nicht ankommt. Zwei begrenzte gerade Linien in einer Ebene unterscheiden sich nämlich eigentlich vollständig in drei Stücken, in ihrer Länge, ihrer Richtung und ihrer Lage, d. h. der Lage desjenigen Punktes, von welchem man die Strecke als beginnend annimmt. Man kann nun aber von zweien dieser Unterscheidungsmerkmale abstrahiren und zwei Strecken als gleich betrachten, wenn sie nur gleiche Länge haben; dies geschieht bei der Darstellung der Strecken durch reelle Grössen. Bei der Darstellung durch complexe Grössen aber abstrahirt man nur von dem dritten Unterscheidungsmerkmal, der Lage, und nennt zwei Strecken dann und nur dann gleich, wenn sie sowohl gleiche Länge als auch gleiche Richtung haben.

Da der Modul einer complexen Grösse die absolute Länge der geraden Linie angiebt, welche jene Grösse repräsentirt, so ist derselbe dem absoluten Werthe einer negativen Grösse analog und dient als Maass bei der Vergleichung complexer Grössen unter einander.

## § 2.

Die Eigenschaft complexer Grössen, dass eine Verbindung zweier oder mehrerer derselben durch mathematische Operationen immer wieder auf eine complexe Grösse führt, hat zur Folge, dass wenn man gegebene complexe Grössen durch Punkte darstellt, das Resultat ihrer Verbindung sich wieder durch einen Punkt darstellen lässt. Wir wollen nun im Folgenden die vier ersten algebraischen Operationen, die Addition, Subtraction, Multiplication und Division durchgehen und untersuchen, wie sich die aus diesen hervorgehenden Punkte geometrisch finden lassen. Dabei sollen die einzelnen Punkte immer mit denselben Buchstaben bezeichnet werden, wie die durch sie dargestellten complexen Grössen; der Nullpunkt, welcher den Werth Null darstellt, werde mit $o$ bezeichnet.

### 1. Addition.

Sind

$$u = x + iy \text{ und } v = x' + iy'$$

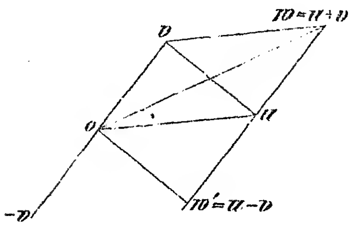
zwei complexe Grössen, und bezeichnet man mit $w$ ihre Summe, so ist

$$w = u + v = (x + x') + i\,(y + y').$$

Der Punkt $w$ hat also die Coordinaten $x + x'$ und $y + y'$. Daraus folgt, dass er der vierte Eckpunkt des Parallelogramms ist, das aus den Seiten $\overline{ou}$ und $\overline{ov}$ gebildet werden kann, oder dass

durch die Grösse $u + v$ die Diagonale $\overline{ow}$ dieses Parallelogramms nach Grösse und Richtung dargestellt wird (Fig. 2). Da die Geraden $\overline{uw}$ und $\overline{ov}$ gleich und direct parallel sind, und daher $\overline{uw}$ ebenfalls durch die complexe Grösse $v$ dargestellt wird, so gelangt man zu dem nämlichen Punkte $w$, wenn man an den Endpunkt $u$ der ersten Geraden, $ou$, die zweite $\overline{ov}$ in ihrer gegebenen Richtung und Länge anfügt. Diese Art der Zusammensetzung oder *geometrischen Addition* gerader Linien ist auch unabhängig von der Betrachtung imaginärer Grössen von *Möbius* *) angewendet worden. Die Summe $u + v$ ist hiernach die dritte Seite eines Dreiecks, dessen andere Seiten durch $u$ und $v$ dargestellt werden. Da nun in jedem Dreiecke eine Seite kleiner ist, als die Summe der beiden andern, und die Längen der Seiten durch die Moduln der complexen Grössen angegeben werden, so folgt der Satz: dass der Modul der Summe zweier complexer Grössen kleiner ist, als die Summe ihrer einzelnen Moduln:

Fig. 2.




$$\text{mod}\,(u + v) < \text{mod}\,u + \text{mod}\,v.$$

Die complexe Grösse $z = x + iy$ erscheint selbst unter der Form einer Summe aus der reellen Grösse $x$ und der rein imaginären $iy$; da erstere einen Punkt der $x$-Axe, letztere einen Punkt der $y$-Axe darstellt, so ist $z$ wirklich der vierte Eckpunkt des Rechtecks, dessen Seiten von der Abscisse $x$ und der Ordinate $y$ des Punktes $z$ gebildet werden.

## 2. Subtraction.

Die Subtraction zweier Punkte ergiebt sich leicht aus der Addition; denn soll

$$w' = u - v$$

sein, so folgt

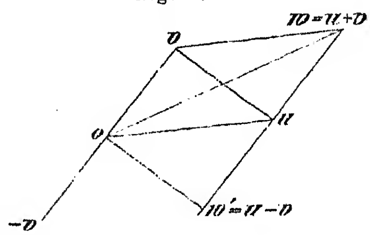
$$u = v + w';$$

also muss der Punkt $w'$ so liegen, dass $\overline{ou}$ die Diagonale des aus $\overline{ov}$ und $\overline{ow'}$ gebildeten Parallelogramms wird (Fig. 2). Demnach erhält man $w'$, wenn man $\overline{ow'}$ der Geraden $\overline{vu}$ gleich und direct pa-

*) *Möbius.* Ueber die Zusammensetzung gerader Linien, etc. Crelle's Journ. Bd. 28. pag. 1.

rallel zieht. Da es nun wieder auf die Lage einer Geraden nicht ankommt, sondern nur auf ihre Länge und Richtung, so stellt die Differenz $u - v$ die Gerade $\overline{vu}$ ihrer Länge und Richtung nach (nämlich von $v$ nach $u$) dar. Die Construction zeigt, dass $u$ in der Mitte der Geraden $\overline{ww'}$ liegt. Nun folgt aber aus

Fig. 2.




$$w = u + v \quad , \quad w' = u - v$$
$$u = \frac{w + w'}{2},$$

also bildet ein Punkt $\frac{w + w'}{2}$ immer den Mittelpunkt der Verbindungslinie der Punkte $w$ und $w'$.

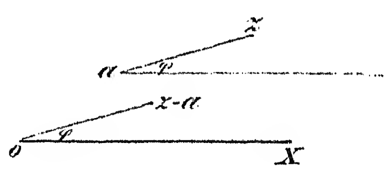
Fällt der Punkt $u$ mit dem Nullpunkt zusammen, d. h. ist $u = 0$, so wird $w' = -v$. In diesem Falle hat man von $o$ aus eine der Geraden $\overline{vo}$ in Richtung und Länge gleiche Gerade zu ziehen, und daher liegt der Punkt $-v$ dem Punkte $v$ diametral gegenüber und in gleicher Entfernung vom Nullpunkte wie der letztere.

Die Subtraction bietet ein Mittel dar, Punkte auf einen andern Nullpunkt zu beziehen. Denn es leuchtet ein, dass ein Punkt $z$ zu einem Punkte $a$ gerade so liegt, wie $z - a$ gegen den Nullpunkt (Fig. 3). Setzt man dann

$$z - a = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so bedeutet $r$ die Entfernung $\overline{az}$, und $\varphi$ die Neigung der Geraden $\overline{az}$ gegen die Hauptaxe. Die Einführung von $z' = z - a$ oder die Substitution von $z + a$ für $z$ verlegt also den Nullpunkt nach $a$, ohne jedoch die Richtung der Hauptaxe zu ändern.

Fig. 3.




## 3. Multiplication.

Wir benutzen hier den Ausdruck der complexen Grössen durch Polarcoordinaten. Seien

$$u = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ und } v = r'\,(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

zwei durch ihre Polarcoordinaten gegebene Punkte, und $w$ ihr Product, so ist

$$w = u.v = rr' (\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')).$$

Demnach bildet der Radius Vector von $w$ mit der Hauptaxe den Winkel $\varphi + \varphi'$, und seine Länge ist gleich dem Product der Zahlen $r$ und $r'$, welche die Längen der Radien Vectoren von $u$ und $v$ angeben. Hieraus geht hervor, dass die Lage des Punktes $w$ oder $u.v$ wesentlich von der als Längeneinheit angenommenen Geraden abhängt, während die Lage von $u + v$ und $u - v$ von dieser Längeneinheit unabhängig ist. Dies liegt auch ganz in der Natur der Sache, denn vergrössert man in $u$ und $v$ die Längeneinheit in dem Verhältnisse von 1 zu $\varrho$, wo $\varrho$ irgend eine reelle Zahl bedeute, so werden die Radien Vectoren von $u + v$ und $u - v$ in demselben Verhältnisse vergrössert, der Radius Vector von $u.v$ dagegen im Verhältnisse von 1 zu $\varrho^2$. Man nehme daher auf der positiven Seite der Hauptaxe einen Punkt 1 so liegend an, dass $\overline{o1}$ gleich der angenommenen Längeneinheit ist (Fig. 4). Da alsdann aus der Gleichung

$$\overline{ow} = r.r'$$

die Proportion

$$1 : r = r' : \overline{ow}$$

oder

$$\overline{o1} : \overline{ou} = \overline{ov} : \overline{ow}$$

folgt, und ausserdem

$$\angle vow = 1ou$$

ist, so ist die Lage des Punktes $w$ dadurch zu construiren, dass man die Dreiecke $vow$ und $1ou$ gleichstimmig ähnlich macht. Statt dessen könnte man natürlich auch die Dreiecke $uow$ und $1ov$ gleichstimmig ähnlich machen, was sich analytisch dadurch manifestirt, dass man in dem Produkt $u.v$ die Factoren mit einander vertauschen kann. Aus der Gleichung

$$w = u.v$$

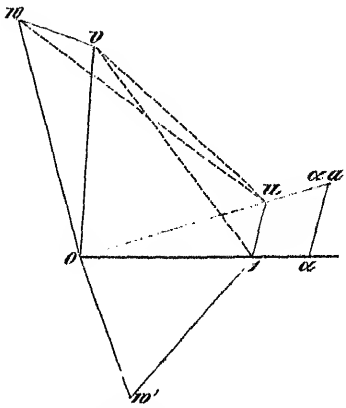
kann man ebenfalls eine Proportion ziehen, nämlich

$$1 : u = v : w;$$

daher stehen die Geraden $\overline{o1}$, $\overline{ou}$, $\overline{ov}$, $\overline{ow}$, auch wenn man ihre Richtung berücksichtigt, in Proportion. In Verbindung mit dem Vorigen ergiebt sich aber hieraus, dass wenn gerade Linien nicht bloss in Rücksicht ihrer Länge, sondern auch in Rücksicht ihrer Richtung mit einander verglichen werden, zwei Paare solcher Geraden dann und nur dann in Proportion stehen, wenn sie nicht bloss ihrer Länge nach proportional sind, sondern auch paarweise gleiche Winkel einschliessen; oder mit anderen Worten, wenn sie entsprechende Seiten zweier gleichstimmig ähnlicher Dreiecke sind. Berücksichtigt man nun dieses Erforderniss, so kann die zuletzt aufgestellte Proportion dazu dienen, um auf die einfachste Weise

zu finden, welche Dreiecke man einander ähnlich zu machen habe.

Fig. 4.




Ist in dem Product $u.v$ der eine der beiden Factoren reell, z. B. $v$, und bezeichnen wir ihn in diesem Falle durch $\alpha$, so liegt der Punkt $\alpha$ auf der Hauptaxe, und daher ergiebt die vorher angegebene Construction, dass der Punkt $\alpha.u$ auf der Geraden $\overline{ou}$ liegt und zwar so, dass sein Radius Vector das $\alpha$-fache des Radius Vectors von $u$ ist.

Hiernach ist die geometrische Bedeutung der Multiplication folgende: Wird eine Grösse $u$ mit einer reellen Grösse $\alpha$ multiplicirt, so wird dadurch nur der Radius Vector von $u$ im Verhältnisse von 1 zu $\alpha$ vergrössert; wird aber $u$ mit einer complexen Grösse $v$ multiplicirt, so wird der Radius Vector von $u$ nicht bloss im Verhältnisse von 1 zu mod $v$ vergrössert, sondern auch zugleich um den Neigungswinkel von $v$ nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

### 4. Division.

Diese erledigt sich unmittelbar durch die vorigen Ergebnisse. Denn soll

$$w' = \frac{u}{v}$$

sein, so zieht man hieraus die Proportion

$$1 : w' = v : u$$

und hat daher die Dreiecke $1ow'$ und $vou$ gleichstimmig ähnlich zu machen (Fig. 4). Die geometrische Ausführung der Division von $u$ durch $v$ besteht also darin, dass der Radius Vector von $u$ im Verhältnisse von 1 zu mod $v$ verkleinert und zugleich um den Neigungswinkel von $v$ nach der Richtung gedreht wird, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen.

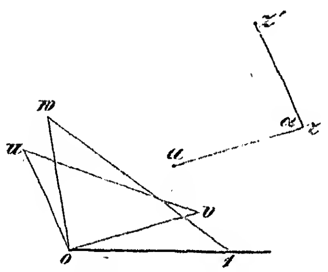
Wir wenden nun die vorigen Betrachtungen noch auf zwei Aufgaben an, die uns im Späteren von Nutzen sein werden.

Erstens. Seien $z$, $z'$ und $a$ drei gegebene Grössen, also auch drei gegebene Punkte; man soll einen vierten Punkt $w$ so bestimmen, dass

$$w = \frac{z' - z}{z - a}$$

ist (Fig. 5). Setzt man $z' - z = u$, $z - a = v$, so findet man zuerst die Punkte $u$ und $v$, indem man $\overline{ou}$ gleich und parallel $\overline{zz'}$, und $\overline{ov}$ gleich und parallel $\overline{az}$ zieht. Nun ist $w = \frac{u}{v}$ oder $1 : w = v : u$; daher erhält man $w$, wenn man

Fig. 5.




$$\triangle\, 1ow \sim vou$$

macht. Hieraus kann nun auch ein Ausdruck für die Grösse $w$ abgeleitet werden, der aus den Seiten $\overline{zz'}$ und $\overline{az}$ und dem Winkel $azz'$ des Dreieckes $azz'$ gebildet ist. Bezeichnet man nämlich diesen Winkel mit $\alpha$, so ist

$$\angle\, 1ow = vou = 180^0 - \alpha.$$

Ferner ist

$$\overline{ow} = \frac{\overline{ou}}{\overline{ov}} = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}},$$

folglich ist der Modul von $w$ gleich $\frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}$, und der Richtungscoefficient gleich $(-\cos\alpha + i\sin\alpha)$, und man hat

$$w = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}(-\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

In dem speciellen Falle, dass $\overline{az}$ senkrecht auf $\overline{zz'}$ steht, ist $\alpha = 90^0$, und dann erhält man

$$w = i\,\frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}.$$

Zweitens: In welcher Beziehung stehen zwei Mal drei Punkte $z$, $z'$, $z''$ und $w$, $w'$, $w''$, wenn zwischen ihnen die Gleichung

$$\frac{z' - z}{z'' - z} = \frac{w' - w}{w'' - w}$$

besteht? (Fig. 6). Man hat hier unmittelbar die Proportion

$$z' - z : z'' - z = w' - w : w'' - w;$$

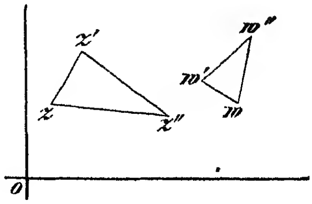
und da die Differenzen die Abstände der entsprechenden Punkte in Bezug auf Länge und Richtung bedeuten, so folgt augenblicklich, dass die Dreiecke

$$z'\,z\,z'' \text{ und } w'\,w\,w''$$

gleichstimmig ähnlich sind.

Wir brechen diese Betrachtungen hier ab, indem wir die Construction der Potenzen als für unsere Zwecke nicht nothwendig übergehen. Bei reellen ganzen Exponenten ergiebt sich dieselbe übrigens unmittelbar aus einer wiederholten Anwendung der Multiplication.*) Nur eine Bemerkung möge hier noch Platz finden. Wenn man irgend eine analytische Beziehung zwischen beliebigen Grössen hat und die auf beiden Seiten der Gleichung vorkommenden analytischen Operationen geometrisch ausführt, so wird man durch zwei verschiedene Constructionen zu dem nämlichen Punkte geführt. Daher ist in jeder analytischen Gleichung zugleich ein geometrischer Satz enthalten. So überzeugt man sich z. B. leicht, dass die Identität

Fig. 6.




$$\frac{u+v}{2} = v + \frac{u-v}{2}$$

den Satz liefert, dass die Diagonalen eines Parallelogramms sich gegenseitig halbiren.**)

## § 3.

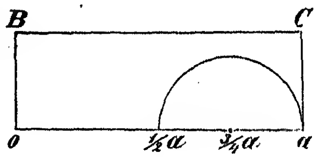
Die besprochene Art, complexe Werthe durch Punkte in einer Ebene geometrisch darzustellen, gewährt nun auch ein anschauliches Bild von einer complexen stetig veränderlichen Grösse. Denkt man sich nämlich eine Reihe stetig auf einander folgender Werthe von $z = x + iy$, also auch eine Reihe stetig auf einander folgender und zusammengehöriger Werthepaare von $x$ und $y$, und stellt jeden Werth von $z$ durch einen Punkt dar, so werden diese Punkte ebenfalls eine stetige Aufeinanderfolge, d. h. in ihrer Gesammtheit eine Linie bilden. Wenn daher die Variable $z$ sich stetig ändert, so beschreibt der darstellende Punkt $z$ eine ununterbrochene Linie. Da sich dabei die reellen Veränderlichen $x$ und $y$ jede ganz unabhängig

*) Für beliebige Potenzen möge auf einen Aufsatz: „Ueber die geometrische Darstellung der Werthe einer Potenz mit complexer Basis und complexem Exponenten“ (*Schlömilch's* Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. V. pag. 345.) verwiesen werden.

**) Ueber die weitere Ausführung der hiemit zusammenhängenden Betrachtungen sei auf die bemerkenswerthe Abhandlung von *Siebeck:* Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen (Crelle's Journ. Bd. 55. pag. 221) verwiesen.

von der andern ändern können, so kann auch der darstellende Punkt $z$ jede beliebige Linie beschreiben. Hiebei verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass es zur Stetigkeit der Veränderung von $z$ durchaus nicht nothwendig ist, dass die von dem darstellenden Punkte beschriebene Linie eine nach einem und demselben mathematischen Gesetze fortgehende Curve sei, d. h. dass die ganz beliebige Beziehung, in welcher $x$ und $y$ an jeder Stelle zu einander stehen müssen, immer durch dieselbe Gleichung (oder überhaupt durch eine solche) ausdrückbar sei. Damit die Veränderung von $z$ stetig vor sich gehe, ist nur erforderlich, dass die Linie einen ununterbrochenen Zug bilde. Einige Beispiele mögen dies erläutern. Denken wir uns, die Veränderliche $z$ beginne ihre Veränderung mit dem Werthe $z = 0$ und gelange, nachdem sie eine Reihe von Werthen durchlaufen hat, zu einem reellen positiven Werthe $a$, welcher durch den Punkt $a$ (Fig. 7) auf der $x$-Axe dargestellt werden möge, indem die Entfernung $oa = a$ sei. Nun kann die Veränderliche $z$ (so drücken wir uns kurz aus, anstatt zu sagen: der bewegliche Punkt, welcher den jedesmaligen Werth der Variablen $z$ darstellt) auf sehr verschiedenen Wegen von $o$ nach $a$ gelangen. **Erstlich** kann sie zwischen $o$ und $a$ nur reelle Werthe annehmen; dann bleibt $y$ constant $= 0$, und $x$ wächst von 0 bis $a$. Die Variable beschreibt die Gerade $oa$. **Zweitens** durchlaufe die Variable $z$ die aus drei Seiten eines Rechtecks bestehende gebrochene Linie $oBCa$, bei welcher $oB = b$ sei. Dann ist $x$ von $o$ bis $B$ constant $= 0$, und $y$ wächst von 0 bis $b$, sodass in $B$, $z = ib$ ist; alsdann bleibt $y$ auf dem erlangten Werthe $b$ stehen, und $x$ wächst von 0 bis $a$, sodass $z$ in $C$ den Werth $a + ib$ erlangt; endlich bleibt von $C$ bis $a$ nun $x$ constant $= a$, und $y$ nimmt von $b$ bis 0 ab. **Drittens** möge die Variable $z$ zuerst auf der Hauptaxe von $o$ bis $^1/_2 a$ gehen und dann einen um den Punkt $^3/_4 a$ als Mittelpunkt mit einem Radius $= {}^1/_4 a$ beschriebenen Halbkreis durchlaufen. Wir zeigen an diesem Beispiele zugleich die Verlegung des Nullpunkts. Wegen der um den Punkt $^3/_4 a$ beschriebenen Kreisbewegung wird nämlich der Gang der reellen Variabeln einfacher, wenn man setzt

Fig. 7.




$$z - {}^3/_4 a = z' = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Alsdann werden die Radien Vectoren von dem Punkte $^3/_4 a$ aus gerechnet. Nun ist im Nullpunkte $z = 0$, also $z' = -{}^3/_4 a$, und daher $r = {}^3/_4 a$, $\varphi = \pi$. Auf dem Wege von $o$ bis $^1/_2 a$ bleibt dann $\varphi$ constant $= \pi$, und $r$ nimmt von $^3/_4 a$ bis $^1/_4 a$ ab, so dass

beim Beginn des Kreises $z' = -\,{}^1/_4 a$, und daher $z = {}^1/_2 a$ ist. Beim Durchlaufen des Kreises bleibt nun $r$ constant $= {}^1/_4 a$, und $\varphi$ nimmt von $\pi$ bis 0 ab, so dass in $a$, $z' = +\,{}^1/_4 a$, also $z = a$ ist. Hiebei haben wir angenommen und werden dasselbe auch in Zukunft immer thun, dass der Neigungswinkel $\varphi$ einer complexen Grösse von der Richtung der positiven $x$-Axe nach der positiven $y$-Axe hin wachse, und wir werden diese Richtung d i e R i c h t u n g d e r w a c h s e n d e n W i n k e l nennen.

Man sieht aus diesen Beispielen, dass zwischen einer veränderlichen Grösse, welche nur reelle Werthe annehmen darf, und einer solchen, der man auch imaginäre Werthe anzunehmen gestattet, ein sehr wesentlicher Unterschied stattfindet. Während durch zwei bestimmte Werthe einer reellen Variablen die Reihe der dazwischen liegenden Werthe, welche die Veränderliche annehmen muss, um von dem ersten zum zweiten Werthe zu gelangen, schon mit bestimmt ist, ist dies bei einer complexen Veränderlichen keineswegs der Fall, vielmehr giebt es unendlich viele Reihen stetig auf einander folgender Werthe, welche von einem bestimmten Werthe einer complexen Variablen zu einem andern bestimmten Werthe hinführen. Geometrisch ausgedrückt kann man sagen: eine reelle Veränderliche kann nur auf einem einzigen Wege von einem Punkte zu einem andern gelangen, nämlich nur auf dem zwischen denselben enthaltenen Stücke der Hauptaxe. Eine complexe Variable dagegen kann man, selbst wenn Anfangs- und Endwerth reell sind, aus der Hauptaxe heraustreten, und auf unendlich vielen verschiedenen Linien oder Wegen von einem Punkte zum andern gehen lassen. Wenn Anfangs- und Endwerth, oder nur einer von beiden, complex sind, so gilt natürlich dasselbe; auch dann kann die Variable beliebige Wege einschlagen, um von dem einen Punkte zum andern zu gelangen.

---

# Zweiter Abschnitt.

## Von den Functionen einer complexen Variablen im Allgemeinen.

---

### § 4.

Indem wir nun zu der Betrachtung von Functionen einer complexen Variablen übergehen, knüpfen wir zwar zunächst an den

aus den Elementen bekannten Begriff einer Function von einer veränderlichen Grösse an, wonach darunter irgend ein Ausdruck verstanden wird, welcher durch mathematische Operationen, die mit der Variablen vorgenommen werden, gebildet ist; werden aber dann diesen Begriff einer Erweiterung zu unterwerfen haben. In früherer Zeit bezeichnete man mit dem Worte: Function einer Grösse, nur das, was wir jetzt eine Potenz nennen. Erst seit *Johann Bernoulli* wurde diese Benennung in der erweiterten Bedeutung angewendet, dass damit nicht bloss die Potenzirung, sondern jede beliebige mathematische Operation oder jede Combination letzterer bezeichnet wird. In neuerer Zeit ist es nun aber nöthig geworden, den Begriff Function auf's Neue zu erweitern und von der Existenz eines mathematischen Ausdrucks für dieselbe zu abstrahiren. Wenn man nämlich eine Variable durch eine andere ausgedrückt hat, sodass die erstere eine Function der letzteren ist, so zeigt sich als das Wesentliche der Verbindung beider, dass jedem Werthe der einen ein Werth (oder auch mehrere Werthe) der andern entspricht. Diese Zusammengehörigkeit der Werthe der Function einerseits und der unabhängigen Variablen andererseits ist es nun, die man vorzugsweise im Auge behält. Sie ist es auch, die überall da hervortritt, wo wir die Abhängigkeit einer Grösse von einer andern erkennen, ohne jedoch im Stande zu sein, das Gesetz dieser Abhängigkeit durch einen mathematischen Ausdruck wiederzugeben. So kennt man, um an ein bekanntes Beispiel zu erinnern, die Abhängigkeit der Spannung des gesättigten Wasserdampfes von seiner Temperatur vollständig in der Weise, dass man nach den Beobachtungen und den danach construirten Tabellen innerhalb gewisser Grenzen für jeden Werth der Temperatur des Dampfes seine Spannung angeben kann. Allein eine aus der Theorie abgeleitete Formel, mittelst welcher man für eine gegebene Temperatur die Spannung berechnen könnte, besitzen wir nicht. Trotz des Fehlens eines solchen mathematischen Ausdrucks ist man aber doch berechtigt, die Spannung als eine Function der Temperatur zu betrachten, weil zu jedem Werthe der letzteren ein Werth der ersteren gehört. Aehnlich verhält es sich mit den algebraischen Functionen im allgemeinen Sinne, d. h. mit den Functionen, welche dadurch entstehen, dass eine Variable mit einer andern durch eine algebraische Gleichung verbunden ist. Man kann die Gleichungen höherer Grade bekanntlich nicht allgemein auflösen, und daher die eine Variable nicht durch die andere ausdrücken. Da man aber weiss, dass zu jedem Werthe derselben eine bestimmte Anzahl von Werthen der ersteren zugehören, so kann man die erstere als Function der letzteren betrachten. Dazu kommt noch, dass die Functionen, mögen sie mathematisch ausdrückbar sein oder nicht, eine, meistens

sehr geringe, Anzahl charakteristischer Eigenschaften besitzen, durch die sie vollständig, oder doch bis auf einen constanten Factor oder eine additive Constante bestimmt sind. Man kann daher dann den Ausdruck der Function durch die charakteristischen Eigenschaften derselben ersetzen.

Denkt man sich nun eine Function innerhalb eines gewissen Intervalles der Werthe der unabhängigen Variablen nur dadurch bestimmt, dass zu jedem Werthe der letzteren der zugehörige Werth der ersteren gegeben oder willkürlich angenommen ist, jedoch so, dass im Allgemeinen stetigen Aenderungen der Variablen auch stetige Aenderungen der Function entsprechen, so tritt ein Unterschied ein, je nachdem der Variablen in dem gegebenen Intervalle nur reelle Werthe zuertheilt, oder auch complexe Werthe mit in den Kreis der Betrachtung gezogen werden. Im ersteren Falle, wenn die Variable nur reelle Werthe annimmt, kann man in der That die Werthe der Function, welche denen der Variablen zugehören sollen, ganz willkürlich wählen, und die einen den andern nach der Stetigkeit entsprechen lassen. Man kann dann auch immer einen für das betreffende Intervall gültigen analytischen Ausdruck für die Function finden, welcher die Werthe der letzteren darstellt; nämlich, wenn dies nicht auf andere Weise möglich sein sollte, so gelingt es doch stets mittelst der Reihen, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten. Bekanntlich ist dies sogar dann noch möglich, wenn die Function an einzelnen Stellen Unterbrechungen der Stetigkeit erleidet. Wenn nun aber complexe Werthe der Variablen mit in Betracht kommen, dann steht es nicht mehr frei, eine Reihe stetiger complexer Werthe willkürlich zu wählen und diese als die Werthe einer Function anzusehen, welche einer stetigen Werthenreihe einer complexen Variablen zugehören. Es tritt hier nämlich der besondere Umstand ein, dass wenn auch in einer complexen Variablen $w = u + iv$ die Grössen $u$ und $v$ Functionen von den reellen Bestandtheilen $x$ und $y$ der Variablen $z = x + iy$ sind, doch deswegen $w$ noch nicht eine Function von $z$ zu sein braucht. Dieser Umstand soll zunächst im folgenden § etwas näher erörtert werden.

## § 5.

Nehmen wir zuerst an, es liege als Function der complexen Variablen $z = x + iy$ ein Ausdruck vor; dann kann dieser wieder auf die Form einer complexen Grösse, also auf die Form

$$w = u + iv$$

gebracht werden, worin $u$ und $v$ reelle Functionen von $x$ und $y$

bedeuten. Allein nun ist nicht auch umgekehrt jeder Ausdruck von der letzteren Form zugleich eine Function von $z$; denn dazu ist erforderlich, dass in $u + iv$ die reellen Variablen $x$ und $y$ so enthalten sind, dass sie nur in der bestimmten Verbindung $x + iy$ darin vorkommen. Es leuchtet ein, dass man leicht Functionen von $x$ und $y$ bilden kann, in denen dies nicht der Fall ist, z. B. $x - iy$, $x^2 + y^2$, $2x + iy$. Dies sind wohl Functionen von $x$ und $y$, aber nicht von $x + iy$; es sind wohl complexe Functionen, aber nicht Functionen einer complexen Variablen, Begriffe, die hienach wohl unterschieden werden müssen. Demnach entsteht die Aufgabe, zu untersuchen, welchen Bedingungen ein gegebener Ausdruck $w = u + iv$, worin $u$ und $v$ reelle Functionen von $x$ und $y$ bedeuten, genügen muss, damit derselbe eine Function von $z = x + iy$ sei. Um diese Bedingungen zu finden, differentiire man $w$ partiell nach $x$ und $y$; dann ist, wenn $w$ zunächst Function von $z$ sein soll,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial y},$$

oder da

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i$$

ist,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{dw}{dz}.$$

Daher erhält man als nothwendige Bedingung dafür, dass $w$ Function von $z$ sei, die Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Umgekehrt kann leicht gezeigt werden, dass diese Bedingung auch hinreichend ist, dass nämlich eine Function $w$ von $x$ und $y$, welche dieser Gleichung genügt, auch immer eine Function von $z$ ist. Substituirt man in dem vollständigen Differential

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy$$

den Werth $i\frac{\partial w}{\partial x}$ statt $\frac{\partial w}{\partial y}$, so erhält man

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}(dx + i\,dy)$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x}\,dz.$$

Eliminirt man aber vor der Differentiation mit Hülfe der Gleichung $z = x + iy$ die Variable $x$ aus der Function $w$, und unterscheidet

die nach der Elimination gebildeten partiellen Differentialquotienten nach $y$ und $z$ von den vorigen durch Klammern, so ist

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) dz,$$

also wenn man diesen Ausdruck für $dw$ von dem vorigen subtrahirt,

$$0 = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) dz - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dy.$$

Da nun aber $dy$ und $dz$ ganz von einander unabhängig sind, so muss einzeln

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

sein. Daraus folgt, dass $w$ nach der Elimination von $x$ auch die Variable $y$ nicht mehr enthält, sondern eine Function von $z$ allein ist. In der That ist nun $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$ mit $\frac{dw}{dz}$ gleichbedeutend, also wie oben $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$. Demnach ist die obige Gleichung

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1}$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $w$ Function von $x + iy$ ist. Hieraus ergeben sich auch Bedingungsgleichungen für die beiden reellen Theile $u$ und $v$. Substituirt man nämlich $u + iv$ für $w$, so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

und dann durch Sonderung des Reellen vom Imaginären

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\,\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Endlich kann man auch für jede dieser Functionen allein eine Bedingungsgleichung herstellen. Denn differentiirt man die vorigen Gleichungen noch einmal partiell nach $x$ und $y$ und eliminirt einmal $v$, das andere Mal $u$, so erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

sodass keine der beiden Functionen $u$ und $v$ willkürlich ist, sondern jede der nämlichen partiellen Differentialgleichung genügen muss.

## § 6.

Bleiben wir noch bei der Voraussetzung stehen, dass die Function $w$ durch einen Ausdruck gegeben sei, so lässt sich nun

aus den Gleichungen (2) noch eine wichtige Folgerung ziehen. Einer Aenderung $dz$ von $z$ entspricht die Aenderung $\frac{dw}{dz}dz$ von $w$. Führt man dann in der derivirten Function $\frac{dw}{dz}$ die Grössen $u$, $v$ und $x$, $y$ ein, so erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{du + i\,dv}{dx + i\,dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)}{dx + i\,dy}.$$

Nun kann aber, wenn die Variable $z$ durch einen Punkt in der $xy$-Ebene dargestellt wird, dieser Punkt seine Lage in jeder beliebigen Richtung ändern, und das Differential $dz = dx + i\,dy$ stellt die unendlich kleine gerade Linie, die die Ortsveränderung von $z$ angiebt, nach Grösse und Richtung dar. Diese unendlich kleine Gerade kann also von $z$ aus nach jeder beliebigen Richtung gezogen werden. Nun zeigt aber der vorige Ausdruck, dass $\frac{dw}{dz}$ von $dz$ nicht unabhängig ist, sondern seinen Werth mit der Richtung von $dz$ ändert. Um dies noch deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir in dem vorigen Ausdrucke das Differentialverhältniss $\frac{dy}{dx}$ einführen, welches eben die Richtung von $dz$ angiebt. Durch Division mit $dx$ im Zähler und Nenner erhält man dann

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}} \tag{4}$$

woraus hervorgeht, dass $\frac{dw}{dz}$ seinen Werth in der That mit dem Werthe von $\frac{dy}{dx}$ ändert, wenn zwischen den vier Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ keine Beziehungen stattfinden. Berücksichtigt man nun aber die Gleichungen (2) und eliminirt mit Hülfe derselben z. B. $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, so erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(1 + i\frac{dy}{dx}\right)}{1 + i\frac{dy}{dx}} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x};$$

dann also wird $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von $\frac{dy}{dx}$ und daher auch von $dz$. **Wenn also $w$ eine Function der complexen Variablen $z = x + iy$ ist, so ist die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von**

dass die Derivirte von der Art, in welcher die Variable $z$ sich verändert, unabhängig ist. Bei einer Function von einer reellen Variablen kommt die Veränderung der Variablen selbst nicht in Betracht, weil diese Veränderung eben nur auf eine einzige Art vor sich gehen kann. Bei Functionen einer complexen Variablen dagegen spielt gerade die Verschiedenartigkeit, mit der die Variable sich verändern kann, eine grosse Rolle, und daher ist der gefundene Satz, dass die Derivirte einer Function einer complexen Variablen von der Art der Veränderung der Variablen unabhängig ist, von grosser Wichtigkeit. Auch wird erst dadurch, dass $\frac{dw}{dz}$ von $dz$ vollständig, d. h. sowohl von der Länge als auch von der Richtung dieser unendlich kleinen Geraden unabhängig ist, der Begriff der derivirten Function in der Weise zu einem bestimmten, wie er es bei reellen Variablen ist.

Bis jetzt haben wir angenommen, dass die Function $w$ durch einen mathematischen Ausdruck von $z$ gegeben sei. Lassen wir nun diese Voraussetzung fallen und nehmen wir vielmehr an, dass innerhalb eines gewissen Gebietes zu jedem Werthe der Variablen $z$ der Werth der Function $w$ bekannt sei, welcher sich mit $z$ im Allgemeinen stetig ändere, so werden wir, damit auch die Derivirte der Function $w$ einen bestimmten Sinn habe, noch die Forderung hinzufügen müssen, dass dieselbe von dem Differential $dz$ unabhängig sei. Die Erfüllung dieser Forderung ist dann aber wieder hinreichend, um $w$ als Function von $x + iy$ zu charakterisiren; denn aus ihr folgen wieder unsere früheren Bedingungen (1), (2) oder (3). Soll nämlich der Ausdruck (4) für $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von $dz$, oder was dasselbe ist, von $\frac{dy}{dx}$ sein, so muss die aus ihm folgende Gleichung

$$\frac{dw}{dz} - \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} + \left(i\frac{dw}{dz} - \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

für jeden Werth von $\frac{dy}{dx}$ erfüllt sein. Demnach erhält man

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$i\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

also, wie oben

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Nach allem diesen hat nun *Riemann**) eine Function einer complexen Grösse folgendermassen definirt: „Eine veränderliche complexe Grösse $w$ heisst eine Function einer anderen veränderlichen complexen Grösse $z$, wenn sie sich mit ihr so ändert, dass der Werth der Derivirten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werthe des Differentials $dz$ ist.“ oder wie es an einer andern Stelle**) ausgedrückt ist: „wenn $w$ sich mit $x+iy$ der Gleichung $\frac{\partial w}{\partial y} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}$ gemäss ändert.“

Hiernach lässt sich nun auch leicht beweisen, dass wenn $w$ eine Function von $z$ ist, die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ es ebenfalls sein muss. Denn aus den Gleichungen

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial w}{\partial y}$$

folgt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{1}{i}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x.\partial y}$$

also ist

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dz}\right) = i\,.\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

und folglich genügt $\frac{dw}{dz}$ auch der Gleichung (1).

Ist ferner $w$ Function von $z = x + iy$, und $z$ Function von $\zeta = \xi + i\eta$, so ist $w$ auch Function von $\zeta$. Denn es ist, wie oben pag. 24,

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,(dx + i\,dy) = \frac{\partial w}{\partial x}\,dz,$$

und ebenso

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi}\,(d\xi + i\,d\eta),$$

also

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\,(d\xi + i\,d\eta);$$

die partiellen Differentialquotienten von $w$ nach $\xi$ und $\eta$ sind daher

*) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse pag. 2.

**) Allgemeine Voraussetzungen etc. Crelle's Journ. Bd. 54. pag. 101.

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = i\,\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

und folglich ist auch

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = i\,\frac{\partial w}{\partial \xi},$$

also $w$ auch Function von $\xi + i\eta$.

## § 7.

Die so eben aufgestellte Bedingung besitzt auch eine bestimmte geometrische Bedeutung, welche noch erörtert werden soll.

Ist wie oben

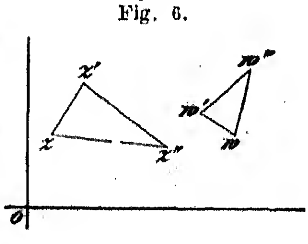
$$z = x + iy \text{ und } w = u + iv,$$

so sind $x$ und $y$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $z$ in einer Ebene, und $u$ und $v$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes $w$ in derselben oder in einer andern Ebene. Ist nun $w$ eine Function von $z$, so wird die Lage des Punktes $w$ von der Lage des Punktes $z$ abhängig sein, und beschreibt $z$ eine Curve, so wird $w$ eine von der letzteren abhängige Curve beschreiben; kurz das ganze aus den Punkten $w$ bestehende System wird in einer bestimmten Abhängigkeit von dem aus den Punkten $z$ gebildeten Systeme stehn, wenn $w$ eine bestimmte Function von $z$ ist. *Riemann* nennt alsdann das System der Punkte $w$ die **Abbildung** der Systemes der Punkte $z$. In Folge der obigen Bedingung stehen nun die beiden Figuren-Systeme in einer ganz bestimmten Beziehung, welche bei jeder Function stattfindet.

Es seien $z'$ und $z''$ (Fig. 6) zwei unendlich nahe an einem dritten Punkte $z$ gelegene Punkte, und man setze die nach verschiedenen Richtungen laufenden unendlich kleinen Verbindungslinien

$$\overline{zz'} = dz' \quad , \quad \overline{zz''} = dz''.$$

Fig. 6.




Ferner seien $w$, $w'$, $w''$ die den Punkten $z$, $z'$, $z''$ entsprechenden Punkte, und die ebenfalls unendlich kleinen Verbindungslinien

$$\overline{ww'} = dw' \quad , \quad \overline{ww''} = dw''.\text{*)}$$

*) Man bemerke, dass wenn auch $\frac{dw}{dz}$ von $dz$ unabhängig ist, doch $dw$, welches $= \frac{dw}{dz}\,dz$ ist, seine Richtung und Grösse mit $dz$ im Allgemeinen ändert.

Soll nun $\frac{dw}{dz}$ für jede Richtung von $dz$ denselben Werth haben, so muss

$$\frac{dw'}{dz'} = \frac{dw''}{dz''} \text{ oder } \frac{dw'}{dw''} = \frac{dz'}{dz''}$$

sein. Nun kann man aber die Differentiale durch die Differenzen der unendlich nahen Punkte ersetzen, also schreiben:

$$dz' = z' - z \qquad dw' = w' - w$$
$$dz'' = z'' - z \qquad dw'' = w'' - w,$$

dann hat man

$$\frac{w' - w}{w'' - w} = \frac{z' - z}{z'' - z}$$

und folglich sind nach § 2 die Dreiecke $z'\,z\,z''$ und $w'\,w\,w''$ einander ähnlich, nämlich die Winkel $z'\,z\,z''$ und $w'\,w\,w''$ einander gleich, und die sie einschliessenden Seiten proportional. Da nun dies für jedes Paar entsprechender Punkte $z$ und $w$ stattfinden muss, so ist die von dem Punkte $w$ beschriebene Figur der von dem Punkte $z$ beschriebenen in den unendlich kleinen Theilen ähnlich, und zwei sich schneidende Curven in der Ebene der $w$ bilden mit einander denselben Winkel, wie die entsprechenden Curven in der Ebene der $z$. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass hierbei vorausgesetzt wird, dass $\frac{dw}{dz}$ weder Null noch unendlich sei. Wir werden später sehen, dass in diesen Fällen eine Ausnahme eintritt.*) *Siebeck* nennt die Abhängigkeit, in welcher das System der $w$ von dem der $z$ steht, Verwandtschaft, und zwar wegen der Eigenschaft, dass je zwei Paare von entsprechenden Curven unter sich gleiche Winkel einschliessen, isogonale Verwandtschaft. Von solchen isogonalen Verwandtschaften sind zwar Einzelheiten schon in grosser Anzahl bekannt, aber in Bezug auf ihre allgemeinen Eigenschaften sind bis jetzt erst zwei näher untersucht worden, nämlich die Verwandtschaft der Aehnlichkeit und die Kreisverwandtschaft, welche letztere von *Möbius* in die neuere Geometrie eingeführt worden ist.

Als Beispiel diene die einfache Function

$$w = z^2.$$

Wir erhalten hier

$$w = x^2 - y^2 + 2ixy$$

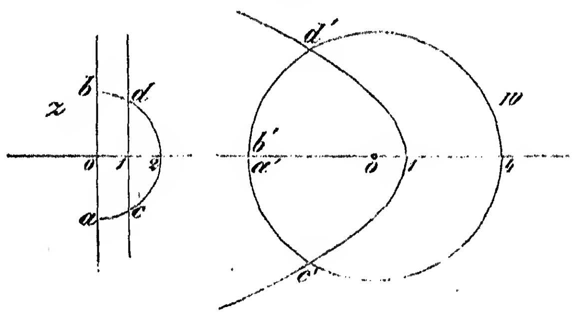
und daher

$$u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

*) Vgl. § 40.

wodurch die Bedingungsgleichungen (2) verificirt sind. Lässt man nun z. B. $z$ die $y$-Axe beschreiben, sodass $x = 0$ ist, so hat man $z = iy$ und $w = -y^2$; daher beschreibt $w$ den negativen Theil der Hauptaxe und zwar nur diesen, sodass, wenn $z$ von $a$ über $o$ nach $b$ geht, $w$ sich von $a'$ nach $o$ und dann wieder zurück nach $b'$ bewegt, wo $a'$ und $b'$ zusammenfallen, wenn $ao = ob$ angenommen wird (Fig. 8). Lässt man ferner $z$ einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r$ beschreiben, sodass, wenn man $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ setzt, $r$ constant bleibt, so ist $w = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$, also beschreibt auch $w$ einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r^2$. Da aber dem Winkel $\varphi$ von $z$ der Winkel $2\varphi$ von $w$ entspricht, so durchläuft $w$ seinen Kreis doppelt so rasch als $z$. Beschreibt z. B. $z$ von $a$ aus einen Halbkreis in der Richtung der wachsenden Winkel nach $b$, so beschreibt

Fig. 8.




$w$ einen ganzen Kreis von $a'$ nach dem mit $a'$ zusammenfallenden Punkte $b'$. Der Winkel aber, den die Gerade und der Kreis in $z$ und in $w$ mit einander bilden, ist bei beiden ein Rechter. Lässt man $z$ eine durch den Punkt 1 gehende mit der $y$-Axe parallele Gerade $cd$ beschreiben, so beschreibt $w$ eine Parabel. Dies ergiebt sich einfach so, dass man, weil in diesem Falle $x$ constant $= 1$ ist, in den Gleichungen $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $x = 1$ setzt und $y$ eliminirt; dadurch erhält man zwischen den Coordinaten $u$ und $v$ des Punktes $w$ die Gleichung $v^2 = 4(1 - u)$, welche zeigt, das $w$ eine Parabel beschreibt, welche ihren Scheitel in 1, ihren Brennpunkt in $o$ hat, und für welche der Parameter, die Ordinate im Brennpunkte, $= 2$ ist. Durch Untersuchung der Tangenten in den Durchschnittspunkten $c'$ und $d'$, welche $c$ und $d$ entsprechen, liesse sich wieder leicht verificiren, dass die Parabel den Kreis in $w$ unter denselben Winkeln schneidet, wie die Gerade $cd$ den Kreis in $z$. Um endlich auch einen der Aus-

nahmefälle durch ein Beispiel zu erläutern, beschreibe noch $z$ die Hauptaxe; dann bleibt $z$ reell, also $w$ positiv, und folglich beschreibt $w$ den positiven Theil der Hauptaxe. Dieser aber bildet mit dem negativen Theile, welcher der $y$-Axe in $z$ entsprach, einen Winkel von 180°, während die $x$- und $y$-Axe in $z$ einen Winkel von 90° mit einander bilden. In der Nähe des Nullpunktes findet also nicht Aehnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen statt, und in der That erhält in diesem Punkte die Derivirte $\frac{dw}{dz} = 2z$ den Werth Null.

---

# Dritter Abschnitt.

## Mehrdeutige Functionen.

---

### § 8.

Die Einführung complexer Variablen wirft auch ein helles Licht auf die Natur der mehrdeutigen Functionen. Da nämlich eine complexe Variable beim Uebergange von einem Anfangspunkte $z_0$ zu einem andern Punkte $z_1$ sehr verschiedene Wege einschlagen kann, so liegt es nahe, sich die Frage zu stellen, ob nicht der durchlaufene Weg von Einfluss sein kann auf den Werth $w_1$, den eine Function, die mit einem bestimmten Werthe $w_0$ aus $z_0$ ausgeht, im Endpuncte $z_1$ erlangt; sich zu fragen, ob die von $w$ beschriebenen, von $w_0$ ausgehenden, Curven, welche den zwischen $z_0$ und $z_1$ beschriebenen entsprechen, immer in demselben Punkte $w_1$ endigen müssen, oder ob sie auch in verschiedenen Punkten endigen können. Nun ist zuerst klar, dass bei eindeutigen Functionen der Endwerth $w_1$ von dem Wege unabhängig sein muss, denn sonst müsste die Function für einen und denselben Werth von $z$ mehrere Werthe annehmen können, was bei einer eindeutigen Function nicht der Fall ist. Allein bei den mehrdeutigen Functionen fällt dieser Grund fort. Bei einer solchen hat in der That die Function für denselben Werth von $z$ mehrere Werthe, und daher ist von vornherein die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass verschiedene Wege auch zu verschiedenen Punkten oder Functionswerthen führen können. Lässt man z. B. in $w = \sqrt{z}$ die Va-

können.*)

Es sind nun hier vor allen Dingen solche Punkte ins Auge zu fassen, in welchen zwei oder mehrere Werthe der Function $w$, die im Allgemeinen verschieden sind, einander gleich werden. Ein solcher ist z. B. für $w = \sqrt{z}$ der Punkt $z = 0$, in diesem werden die im Allgemeinen mit verschiedenen Vorzeichen behafteten Werthe von $w$ einander gleich, nämlich beide $= 0$. Betrachten wir ferner die durch die cubische Gleichung

$$w^3 - w + z = 0$$

definirte Function, so liefert hier die Cardanische Formel, wenn der Kürze wegen

$$p = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-z - \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}}\right)}, \quad q = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\left(-z + \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}}\right)},$$

und die beiden imaginären Cubikwurzeln der Einheit

$$\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \alpha, \quad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \alpha^2$$

gesetzt werden, folgende Ausdrücke für die drei Wurzeln der obigen Gleichung, welche mit $w_1$, $w_2$, $w_3$ bezeichnet werden mögen:

$$\begin{aligned} w_1 &= p + q \\ w_2 &= \alpha p + \alpha^2 q \\ w_3 &= \alpha^2 p + \alpha q. \end{aligned}$$

Für jeden Werth von $z$ hat hier im Allgemeinen $w$ die drei Werthe $w_1$, $w_2$, $w_3$. Von diesen werden aber die beiden letzten einander gleich, wenn $p = q$ ist, was eintritt, wenn

$$z = \frac{2}{\sqrt{27}}.$$

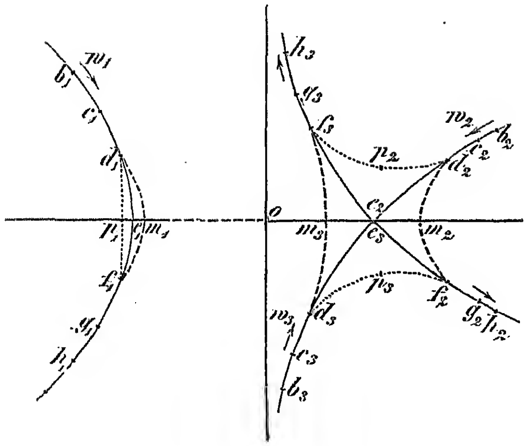
*) Wir haben bei diesen Betrachtungen die (nicht rationalen) algebraischen Functionen im Auge und setzen daher stets voraus, dass die Anzahl der Werthe, welche die Function für den nämlichen Werth der Variablen $z$ annehmen kann, eine endliche ist.

ist. In diesem Punkte wird

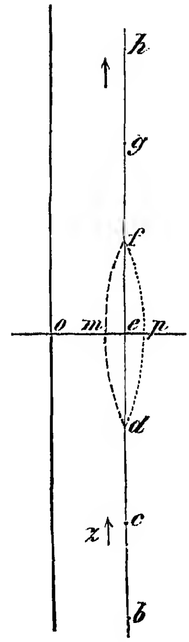
$$w_2 = w_3 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Nehmen wir nun an, indem wir an dieses Beispiel die ferneren Betrachtungen anknüpfen, die Variable $z$ verändere sich stetig, oder der sie darstellende Punkt beschreibe eine Linie, so werden die drei Grössen $w_1$, $w_2$, $w_3$ sich ebenfalls, jede für sich, stetig ändern, oder die drei entsprechenden Punkte werden drei abgesondert verlaufende Linien beschreiben. Wenn aber $z$ durch den Punkt $z = \frac{2}{\sqrt{27}}$ hindurchgeht, so nehmen beide Grössen $w_2$ und $w_3$ den Werth $\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ an; die beiden von $w_2$ und $w_3$ beschriebenen Linien werden daher in dem Punkte $\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ zusammentreffen. Beim Ueberschreiten dieses Punktes kann demnach ohne Unterbrechung der Stetigkeit $w_2$ in $w_3$, und $w_3$ in $w_2$ übergehen, ja es bleibt vollständig willkürlich, auf welcher der beiden Linien man jede der beiden Grössen $w_2$ und $w_3$ ihren Weg fortsetzen lassen will. Es findet an dieser Stelle gleichsam eine Verzweigung der Linien statt, welche von den Grössen $w_2$ und $w_3$ beschrieben werden; daher hat *Riemann* die Punkte der $z$-Ebene, bei welchen ein Functionswerth in einen anderen übergehen kann, Verzweigungspunkte genannt. In unserem Beispiele ist hienach der Punkt $z = \frac{2}{\sqrt{27}}$ ein Verzweigungspunkt (nicht etwa $w = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$). Zur Erläuterung ist Fig. A und B beigefügt worden. In Fig. A sind die drei Linien $w_1$, $w_2$, $w_3$ für den Fall gezeichnet, dass $z$ eine der $y$-Axe parallele Gerade beschreibt, welche durch den Verzweigungspunkt $e = \frac{2}{\sqrt{27}}$ (Fig. B) hindurchgeht. Dabei ist aber die Linie $w_1$ der Deutlichkeit wegen in doppelt so grossem Maassstabe, als die übrigen Linien, dargestellt und, um Raum zu sparen, näher an die Ordinatenaxe herangerückt, als sie eigentlich verläuft. Die Punkte $w$, welche den Punkten $z$ entsprechen, sind mit den nämlichen Buchstaben und hinzugefügten Indices 1, 2, 3 bezeichnet. Das Bild der Verzweigung tritt nun noch deutlicher hervor, wenn man nur eine der Grössen, z. B. $w_3$, verfolgt. Diese beschreibt die Linie $b_3\, c_3\, d_3$, welche sich dem Punkte $e_3 = e_2 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ nähert, wenn $z$ auf der Linie $bcd$ an den Punkt $e = \frac{2}{\sqrt{27}}$ heran geht; überschreitet nun $z$ diesen Punkt, so gehen für $w_3$ zwei Wege von $e_2 = e_3 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$

Fig. A.




Fig, B.*




sprechend angesehen werden kann; es theilt sich der dem $w_3$ freistehende Weg bei $e_2 = e_3$ wirklich in zwei Zweige. Wenn nun $z$ von $b$ nach $h$ durch den Verzweigungspunkt $e$ geht, so kann $w_3$ von $b_3$ ebensowohl nach $h_3$ wie nach $h_2$ gelangen, und ebenso $w_2$ von $b_2$ aus; bei einem solchen durch einen Verzweigungspunkt hindurchführenden Wege bleibt also der Endwerth der Function unbestimmt. Wenn dagegen $z$ von $b$ nach $h$ einen Weg beschreibt, der nicht durch einen Verzweigungspunkt hindurch führt, so kann zwar je nach der Beschaffenheit dieses Weges der Endwerth der Function ein verschiedener sein, er ist aber für jeden bestimmten Weg des $z$ immer ein ganz bestimmter. Auch dies erläutern die Figuren A und B. Geht nämlich $z$ von $b$ über $d$, und dann längs der gestrichelten Linie über $m$ nach $f$ und $h$, so geht $w_3$ von $b_3$ über $d_3$ und dann längs der ebenso bezeichneten Linie über $m_3$ nach $f_3$ und $h_3$; $w_2$ von $b_2$ über $d_2$, $m_2$, $f_2$ nach $h_2$; $w_3$ erlangt dann den bestimmten Werth $h_3$, und $w_2$ den bestimmten Werth $h_2$. Diese Endwerthe werden andre, aber wiederum bestimmte, wenn $z$ den Verzweigungspunkt $e$ auf der anderen Seite längs der punktirten

meinen sind nun solche Punkte der $z$-Ebene, in welchen mehrere sonst verschiedene Werthe einer Function einander gleich werden, in der Regel auch Verzweigungspunkte der Function. Von einer Ausnahme hievon soll sogleich die Rede sein.

Eine ähnliche Verzweigung der Function findet für solche Punkte statt, in denen $w$ unendlich gross wird und dadurch eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Dies ist z. B. bei der durch die Gleichung

$$(z - b)\,(w - c)^3 = z - a \text{ oder } w = c + \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}}$$

bestimmten Function der Fall, in welcher $a$, $b$, $c$ drei complexe Constanten, also drei feste Punkte bedeuten. Hier ist $z = a$ ein Verzweigungspunkt, in welchem drei Werthe der Function in dem einen $w = c$ zusammenfallen. Ausserdem aber werden für $z = b$ alle drei Werthe von $w$ unendlich gross. Hier erleiden die drei Functionen eine Unterbrechung der Stetigkeit, und daher kann es wieder unentschieden bleiben, auf welchem Wege jede fortzusetzen ist, weil wenn die Function einen Sprung macht, sie eben so wohl nach der einen, wie nach einer anderen Fortsetzung ihres Weges überspringen kann. Daher ist $z = b$ ebenfalls ein Verzweigungspunkt. Auch im Allgemeinen sind diejenigen Punkte, in denen $w$ unendlich gross oder unstetig ist, in der Regel Verzweigungspunkte.

Es kann hievon aber auch Ausnahmen geben: es giebt Fälle, bei welchen Punkte, in denen Functionswerthe einander gleich oder unendlich gross werden, doch keine Verzweigungspunkte sind. Dies kann für jetzt nur erst an einem Beispiele erläutert werden. In den Functionen

$$\sqrt{1 - z^2} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

sind $z = +1$ und $z = -1$ Verzweigungspunkte; dagegen in

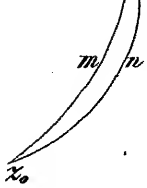
$$(z - a)\sqrt{z} \text{ und } \frac{1}{(z - a)\sqrt{z}}$$

ist $z = a$ **kein** Verzweigungspunkt, obgleich die Functionswerthe an dieser Stelle im ersten Falle beide gleich Null und im zweiten beide unendlich gross sind. Wenn nämlich $z$ den Punkt $a$ überschreitet, so hat sowohl $z - a$ als auch $\sqrt{z}$ eine ganz bestimmte stetige Fortschreitung: $z - a$, weil es überhaupt eindeutig ist, und $\sqrt{z}$, weil $+\sqrt{a}$ ohne Unterbrechung der Stetigkeit nicht plötzlich nach $-\sqrt{a}$ überspringen kann. Daher haben auch die aus diesen Grössen auf rationale Weise zusammengesetzten Functionen an dieser Stelle für jede von $z$ beschriebene Linie eine bestimmte Fortschreitung, und es findet keine Verzweigung statt. Die Verzweigungspunkte sind demnach zwar nur unter denjenigen Punkten zu suchen, in welchen entweder eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt, oder mehrere Functionswerthe zusammenfallen; aber ob solche Punkte wirklich Verzweigungspunkte sind, muss noch besonders entschieden werden.

## § 9.

Die vorigen Betrachtungen haben gezeigt, dass wenn die Variable $z$ von einem beliebigen Punkte $z_0$ ausgehend nach einem andern Punkte $z_1$ hin einen Weg beschreibt, welcher durch einen Verzweigungspunkt einer Function $w$ hindurchführt, dieselbe in $z_1$ verschiedene Werthe erhält, je nachdem man sie auf dem einen oder dem andern ihrer Zweige weiter gehen lässt. Bei einem solchen Wege des $z$ ist also der Werth des $w$ in $z_1$ unbestimmt. Auf jedem andern Wege dagegen, der nicht durch einen Verzweigungspunkt hindurch führt, erhält $w$ in $z_1$ einen bestimmten Werth, und wir wollen nun zeigen, dass zwei Wege, die beide von $z_0$ nach $z_1$ führen, dem $w$ in $z_1$ **nur dann verschiedene Werthe zuertheilen, wenn sie einen Verzweigungspunkt einschliessen.** Dazu beweisen wir zuerst folgenden Satz:

**Lässt man die Variable $z$ zwei unendlich nahe liegende Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ (Fig. 9) von $z_0$ nach $z_1$ beschreiben, welche an keiner Stelle einem Punkte unendlich nahe kommen, in dem entweder die Function $w$ unstetig wird, oder in welchem mehrere Functionswerthe zusammenfallen, so erhält die Function $w$, wenn sie aus $z_0$ mit dem nämlichen Werthe ausgeht, auf beiden Wegen in $z_1$ den nämlichen Werth.**




Punkt $z$ einem solchen Punkte unendlich nahe liegt, in dem mehrere Functionswerthe zusammenfallen. (Vgl. Fig. A und B S. 35. In diesem Beispiele nähern sich die von den Functionswerthen beschriebenen Linien nur für den Punkt $c$, während sie für alle anderen Punkte $z$ in endlichen Entfernungen von einander verlaufen.) Da nun die beiden Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ der Voraussetzung gemäss sich nirgend einem solchen Punkte nähern, so sind die verschiedenen Werthe, die $w$ in irgend einem Punkte der beiden Wege haben kann, um endliche Grössen von einander verschieden. Folglich können auch die Werthe, welche die Function $w$ auf den beiden Wegen $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ in $z_1$ erlangt, nur entweder einander gleich oder um eine endliche Grösse von einander verschieden sein. Nun kann aber die letztere Alternative nicht Statt haben. Denkt man sich nämlich, dass zwei bewegliche Punkte $z$ die beiden unendlich nahen Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ in der Art durchlaufen, dass sie stets einander unendlich nahe bleiben, und bezeichnet man die Functionswerthe auf der einen Linie mit $w_m$ und auf der anderen mit $w_n$, so können $w_m$ und $w_n$ längs beider Linien nur um eine unendlich kleine Grösse von einander verschieden sein, da der Voraussetzung nach $w$ bei beiden Wegen aus $z_0$ mit dem nämlichen Werthe ausgeht, und beim Uebergang von einem Punkte der einen Linie zu einem unendlich nahen Punkte der anderen Linie Stetigkeit stattfindet. Wenn nun $w_m$ und $w_n$ in $z_1$ um eine endliche Grösse verschieden wären, so müsste mindestens eine dieser Functionen an irgend einer Stelle einen Sprung machen, was durch die Voraussetzung ausgeschlossen wird, dass die beiden Wege $z_0 m z_1$ und $z_0 n z_1$ sich keinem Punkte nähern sollen, in welchem eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt. Demnach können $w_m$ und $w_n$ in $z_1$ nicht um eine endliche Grösse von einander verschieden sein, und daher sind sie nach dem Obigen einander gleich.

Denkt man sich nun, nachdem dies festgestellt ist, eine Reihe auf einander folgender und unendlich nahe an einander liegender Wege, alle zwischen den Punkten $z_0$ und $z_1$, und so beschaffen, dass keiner derselben sich einem Punkte nähert, in dem entweder Unstetigkeit eintritt, oder Functionswerthe zusammenfallen, so erhält die Function auf allen diesen Wegen den nämlichen Werth in $z_1$. Daraus folgt dann: Wenn man einen Weg zwischen zwei Punkten

Punkte $z_0$ und $z_1$ zusammenfallen, wenn die Variable also eine geschlossene Linie beschreibt. Die obige Bedingung verwandelt sich in diesem Falle in die, dass die geschlossene Linie keinen der erwähnten kritischen Punkte einschliessen darf. Lässt man daher die Variable $z$ von $z_0$ ausgehend eine geschlossene Linie beschreiben und wieder nach $z_0$ zurückkehren, so erhält die Function, wenn die Variable die geschlossene Linie durchlaufen hat und zum zweiten Male nach $z_0$ kommt, hier denselben Werth, den sie beim Ausgange hatte, wenn die geschlossene Linie keinen Punkt umgiebt, in welchem entweder Unstetigkeit eintritt oder Functionswerthe zusammenfallen.

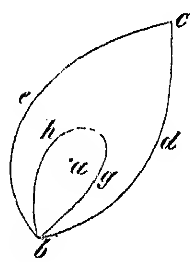
Solche geschlossene Linien, die von der Variablen $z$ beschrieben werden, sind nun für die Untersuchung des Einflusses, den der Weg, auf welchem die Variable $z$ nach irgend einem Punkte hingeht, auf den Werth ausübt, welchen die Function $w$ in diesem Punkte erlangt, maassgebend. Umgiebt eine geschlossene Linie keinen der schon so oft erwähnten Punkte, so ändert, wie gezeigt worden ist, die Function ihren Werth nicht; umgiebt sie aber einen solchen Punkt, so kann die Function ihren Werth ändern, oder auch nicht ändern. Werden ferner von der Variablen zwischen zwei Punkten zwei Wege durchlaufen, die keinen derartigen Punkt einschliessen, so führen diese zu gleichen Functionswerthen. Wir haben daher nur Wege zu betrachten, die einen solchen Punkt einschliessen. Sei nun $a$ (Fig. 10) ein Punkt von dieser Art, und nehmen wir zwei Wege $bdc$ und $bec$ an, welche $a$, aber keinen anderen ähnlichen Punkt einschliessen. Aus $b$ gehe $w$ mit dem Werthe $w_0$ aus und erlange auf dem Wege $bdc$ in $c$ den Werth $w_0'$. Lässt man dann aber die Variable $z$, ehe sie den anderen Weg $bec$ betritt, zuvor eine den Punkt $a$ umgebende geschlossene Linie $bghb$ durchlaufen, so kann der Weg $bghbec$ in $bdc$ umgeformt werden, ohne dass der Punkt $a$ überschritten wird, folglich erlangt $w$ auf diesem Wege in $c$ ebenfalls den Werth $w_0'$, wenn es aus $b$ mit dem Werthe $w_0$ ausgeht. Wir haben also Folgendes:

auf $bdc$ geht $w$ von $w_0$ nach $w_0'$

„ $bghbec$ „ $w$ „ $w_0$ „ $w_0'$.

Nehmen wir nun zuerst an, $w$ ändere seinen

Fig. 10.



Werth beim Durchlaufen der geschlossenen Linie $bghb$ und gehe in $w_1$ über, so haben wir zu setzen:

auf $bghb$ geht $w$ von $w_0$ nach $w_1$

und daher

auf $bec$ „ $w$ „ $w_1$ „ $w_0'$.

Demnach erlangt $w$ auf $bec$ in $c$ den Werth $w_0'$ dann, wenn es aus $b$ mit dem Werthe $w_1$ ausgeht; lässt man es also aus $b$ mit dem Werthe $w_0$ ausgehn, so kann es den Werth $w_0'$ nicht erlangen, sondern muss zu einem andern Werthe geführt werden. Wenn dagegen $w$ auf der geschlossenen Linie $bghb$ seinen Werth nicht ändert, so haben wir zu setzen:

auf $bghb$ geht $w$ von $w_0$ nach $w_0$

„ $bec$ „ $w$ „ $w_0$ „ $w_0'$;

dann erlangt also $w$, aus $b$ mit dem Werthe $w_0$ ausgehend, auch auf dem Wege $bec$ den Werth $w_0'$.

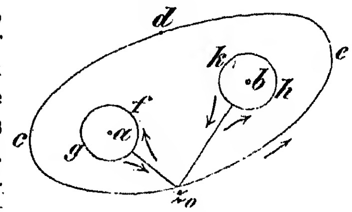
Hieraus folgt nun: wenn zwei Wege einen unserer in Rede stehenden Punkte $a$ einschliessen, so führen sie zu verschiedenen oder gleichen Functionswerthen, je nachdem die Function $w$ beim Durchlaufen einer den Punkt $a$ umgebenden geschlossenen Linie ihren Werth ändert oder nicht ändert.

Jetzt sind wir im Stande, die Verzweigungspunkte näher festzustellen. Es soll nämlich ein Punkt $a$, in welchem entweder eine Unstetigkeit eintritt oder mehrere Functionswerthe zusammenfallen, dann und nur dann ein Verzweigungspunkt genannt werden, wenn die Function beim Umlaufe um eine diesen Punkt und keinen andern ähnlichen umgebende geschlossene Linie ihren Werth ändert. Hiebei ist jedoch zu bemerken, dass es nicht nothwendig ist, dass alle Functionswerthe gleichzeitig ihre Werthe ändern. Damit der betrachtete Punkt ein Verzweigungspunkt sei, ist nur erforderlich, dass dies bei irgend einem der in Betracht kommenden Functionswerthe eintritt. Es kann nämlich der Fall vorkommen, dass bei dem Umlaufe um einen Verzweigungspunkt nur einige Functionswerthe sich ändern, während andere ungeändert bleiben. Das pag. 34 ff. betrachtete Beispiel bietet einen solchen Fall dar. Lässt man die Variable $z$ in Fig. B die geschlossene Linie $dpfmd$ durchlaufen, welche den Verzweigungspunkt $e = \frac{2}{\sqrt{27}}$ umgiebt, so ersieht man aus Fig. A, dass dann $w_2$ in $w_3$, und $w_3$ in $w_2$ übergeht, dass aber $w_1$ seinen Werth nicht ändert, sondern ebenfalls eine geschlossene Linie beschreibt. Hiemit ist denn der im Eingange dieses Paragraphen ausgesprochene Satz dargethan, dass zwei verschiedene, dieselben Punkte verbindende Wege nur dann einer

Punkte stattfindenden Werthe dadurch auf stetige Weise übergehn, dass die Variable $z$ von $z_0$ aus eine geschlossene Linie beschreibt, welche einen Verzweigungspunkt umgiebt.

Geschlossene Linien, welche zwei oder mehrere Verzweigungspunkte umgeben, können ebenfalls auf solche geschlossene Linien zurückgeführt werden, welche nur einen Verzweigungspunkt enthalten. Denn zieht man von einem Punkte $z_0$ aus um jeden Verzweigungspunkt eine geschlossene Linie und lässt die Variable dieselben eine nach der anderen durchlaufen, so kann dieser Weg, ohne dass einer der Verzweigungspunkte überschritten wird, in eine geschlossene Linie umgeformt werden, die von $z_0$ aus alle Verzweigungspunkte umgiebt. (Fig. 11, wo $a$ und $b$ zwei Verzweigungspunkte bedeuten.) Man stellt solche geschlossene Linien um die einzelnen Verzweigungspunkte am einfachsten dadurch her, dass man um jeden einen kleinen Kreis beschreibt und jeden dieser Kreise mit $z_0$ durch eine Linie verbindet, die dann doppelt, hin und wieder zurück, durchlaufen werden muss.

Fig. 11.




## § 10.

Es sollen nun die vorigen Betrachtungen an einigen Beispielen erläutert, und daran zugleich gezeigt werden, in welcher Weise die Functionswerthe beim Durchlaufen geschlossener, einen Verzweigungspunkt umgebender Linien in einander übergehen.

Erstes Beispiel.

$$w = \sqrt{z}.$$

Hier ist $z = 0$ ein Verzweigungspunkt. Lässt man die Veränderliche von dem Punkte $z = 1$ ausgehen und die Peripherie eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises durchlaufen, so ist dies eine geschlossene Linie, welche den Verzweigungspunkt umgiebt. Geht nun die Function $w = \sqrt{z}$ von dem Punkte $z = 1$ mit dem Werthe $w = +1$ aus, und setzt man

$$z = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so ist zuerst im Punkte $z = 1$, $r = 1$ und $\varphi = 0$. Durchläuft dann $z$ die Peripherie des Kreises in der Richtung der wachsenden Winkel, so bleibt $r$ constant $= 1$, und $\varphi$ nimmt von 0 bis $2\pi$ zu. Kommt also die Veränderliche wieder nach dem Punkte $z = 1$ zurück, so ist jetzt

$$z = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$$

und folglich

$$w = \sqrt{z} = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

die Function hat also jetzt im Punkte $z = 1$ nicht wieder den ursprünglichen Werth $+1$, sondern den andern Werth $-1$ erhalten. Ganz dasselbe tritt auch ein, wenn die Variable irgend eine andere geschlossene, den Nullpunkt einmal umgebende Linie von $z = 1$ aus beschreibt; denn dieser Weg kann durch allmälige Aenderungen in den Kreis übergeführt werden, ohne dass dabei der Nullpunkt überschritten wird. Geht überhaupt $w$ mit dem Werthe $w_0$ von irgend einem Punkte $z_0$ aus, für welchen

$$z_0 = r_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$$

also

$$w_0 = r_0^{\frac{1}{2}} (\cos \tfrac{1}{2} \varphi_0 + i \sin \tfrac{1}{2} \varphi_0)$$

ist, und beschreibt $z$ eine geschlossene Linie, welche den Nullpunkt einmal in der Richtung der wachsenden Winkel umwindet, so ist bei der Rückkunft noch $z_0$

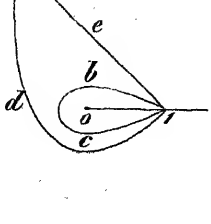
$$z = r_0 (\cos (\varphi_0 + 2\pi) + i \sin (\varphi_0 + 2\pi))$$

geworden; mithin ist dann

$$w = r_0^{\frac{1}{2}} (\cos (\tfrac{1}{2} \varphi_0 + \pi) + i \sin (\tfrac{1}{2} \varphi_0 + \pi))$$
$$= - w_0.$$

Wird die geschlossene Linie zweimal von der Variablen durchlaufen, oder beschreibt letztere eine andere geschlossene Linie, welche den Nullpunkt zweimal umwindet, so wächst das Argument von $z$ um $4\pi$, also das von $w$ um $2\pi$, und folglich erhält dann die Function ihren ursprünglichen Werth wieder.

Fig. 12.




Man lasse nun die Variable von dem Punkte $z = 1$ nach einem beliebigen Punkte $Z$ gehen, und zwar zuerst auf einer Linie $1eZ$ (Fig. 12), welche den Nullpunkt nicht umwindet, und auf welcher die Winkel $\varphi$ wachsen. Auf diesem Wege mögen $r$ und $\varphi$ in $Z$ die Werthe $R$ und $\vartheta$, und $w$ den Werth $W$ erreichen, sodass

$$W = R^{\frac{1}{2}} (\cos \tfrac{1}{2}\vartheta + i \sin \tfrac{1}{2}\vartheta)$$

ist. Geht man dann aber auf der anderen

Seite des Nullpunktes von 1 nach $Z$ auf einer den Nullpunkt nicht umwindenden Linie $1dZ$, so nimmt der Winkel $\varphi$ ab und erreicht in $Z$ den Werth $\vartheta - 2\pi$. Daher wird jetzt in $Z$

$$z = R\,(\cos(2\pi - \vartheta) - i\sin(2\pi - \vartheta))$$

und

$$w = R^{\frac{1}{2}}\,(\cos(\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta) - i\sin(\pi - \tfrac{1}{2}\vartheta))$$

d. h.

$$w = -W.$$

Lässt man endlich $z$ zuerst von 1 aus eine geschlossene Linie $1bc1$ um den Nullpunkt und dann die Linie $1dZ$ beschreiben, so wächst $\varphi$ zuerst von 0 bis $2\pi$ und nimmt dann um den Winkel $2\pi - \vartheta$ ab, sodass dann $\varphi$ in $Z$ den Werth $2\pi + \vartheta - 2\pi = \vartheta$ erhält; in diesem Falle geht also $w$ nach dem Durchlaufen der Linie $1bc1$ von 1 mit dem Werthe $-1$ aus und erlangt auf $1dZ$ in $Z$ den Werth $+W$.

Zweites Beispiel. In der Function

$$w = (z - 1)\sqrt{z}$$

ist zuerst $z = 0$ ein Verzweigungspunkt, und es verhält sich diese Function in Beziehung auf diesen Punkt ähnlich wie die vorige. Betrachten wir daher den Punkt $z = 1$, für welchen ebenfalls $w = 0$ wird. Die Variable $z$ beschreibe um ihn einen Kreis mit dem Radius $r$, von dem Punkte $a = 1 + r$ der Hauptaxe (Fig. 13) ausgehend. Setzt man

$$z - 1 = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

so wird

$$w = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\sqrt{1 + r\cos\varphi + ir\sin\varphi}.$$

Da nun $r$ constant bleibt, und $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ wächst, so ändert der Factor $r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ seinen Werth nicht. Um das Verhalten des zweiten Factors zu untersuchen, sei

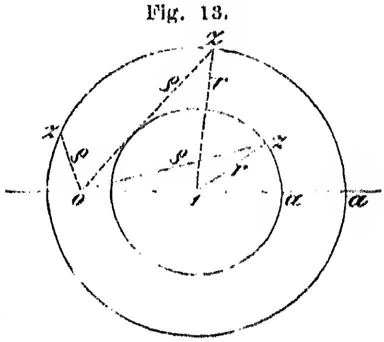
$$1 + r\cos\varphi = \varrho\cos\psi \qquad r\sin\varphi = \varrho\sin\psi;$$

dann bedeutet $\varrho$ die Gerade $oz$, und $\psi$ die Neigung derselben gegen die Hauptaxe, und es wird

$$w = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\varrho^{\frac{1}{2}}\,(\cos\tfrac{1}{2}\psi + i\sin\tfrac{1}{2}\psi).$$

Umgiebt nun der Kreis den Nullpunkt nicht, so durchläuft $\psi$ von 0 an eine Reihe von Werthen, welche wieder mit dem Werthe 0 endigen, daher ändert $w$ seinen Werth nicht. Ist aber der Kreis

Fig. 13.



so gross, dass der Nullpunkt, welcher ein Verzweigungspunkt ist, ebenfalls innerhalb desselben liegt, so wächst $\psi$ von $0$ bis $2\pi$, und dann geht also der ursprüngliche Werth $w = r\varrho^{\frac{1}{2}}$ in $-r\varrho^{\frac{1}{2}}$ über. Es bestätigt sich also, dass nur der Punkt $z = 0$ ein Verzweigungspunkt ist, der Punkt $z = 1$ aber nicht.

Man kann die gegebene Function $(z-1)\sqrt{z}$ als aus der folgenden

$$w' = \sqrt{(z-1)(z-b)z}$$

entstanden betrachten dadurch, dass $b$ gleich 1 geworden ist. Eine den Punkt $z=1$ umgebende Linie kann dann betrachtet werden als eine Linie, welche die beiden Punkte $z = 1$ und $z = b$ zugleich umgab, und bei welcher dann diese beiden Punkte zusammengefallen sind. Nun sind für die Function $w'$ sowohl $z = 0$, als auch $z = 1$ und $z = b$ Verzweigungspunkte. Eine geschlossene Linie, welche von einem Punkte $z_0$ aus beide Punkte 1 und $b$ umgiebt, kann ersetzt werden durch zwei geschlossene Linien, von denen jede nur einen derselben umgiebt. Geht nun $w'$ mit dem Werthe $w_0'$ aus $z_0$ aus, so geht beim Umkreisen des Punktes $b$, $w_0'$ in $-w_0'$, und dann beim Umkreisen des Punktes 1 wieder $-w_0'$ in $w_0'$ über. Die Function kommt also mit dem ursprünglichen Werthe nach $z_0$ zurück. Dies bleibt nun bestehen, wenn $b$ sich dem Punkte 1 nähert, und wir sehen, dass wenn diese Verzweigungspunkte auf einander fallen, der gemeinschaftliche Punkt aufhört, ein Verzweigungspunkt zu sein. Es leuchtet ein, dass dies allgemein gelten muss: sobald bei zwei Verzweigungspunkten nur zwei und zwar die nämlichen zwei Functionswerthe gegenseitig in einander übergehen, so heben diese Verzweigungspunkte beim Zusammenfallen einander auf, und es entsteht ein Punkt, der kein Verzweigungspunkt mehr ist.

Drittes Beispiel. Sei

$$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}},$$

worin $a$ und $b$ zwei complexe Constanten bedeuten. Hier haben wir zwei Verzweigungspunkte $z = a$ und $z = b$. Lässt man nun zuerst $z$ eine geschlossene Linie von einem beliebigen Punkte $z_0$ aus um den Punkt $a$ beschreiben, welche aber $b$ nicht umgiebt, und setzt zu dem Ende

$$z - a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

während

$$z_0 - a = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$$

sei, so ist der Anfangswerth von $w$, der hier mit $w_1$ bezeichnet werden möge,

$$w_1 = \frac{r_0^{\frac{1}{3}} (\cos \tfrac{1}{3} \varphi_0 + i \sin \tfrac{1}{3} \varphi_0)}{[a - b + r_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}.$$

Nachdem die geschlossene Linie einmal in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen ist, ist $\varphi_0$ um $2\pi$ gewachsen, und daher der entstehende Werth von $w$, welcher mit $w_2$ bezeichnet werden soll,

$$w_2 = \frac{r_0^{\frac{1}{3}} (\cos (\tfrac{1}{3} \varphi_0 + \tfrac{2}{3} \pi) + i \sin (\tfrac{1}{3} \varphi_0 + \tfrac{2}{3} \pi))}{[a - b + r_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}$$

geworden. Dabei kann der Nenner, also die Grösse $\sqrt[3]{z - b}$ ihren Werth nicht geändert haben, weil für diese $z = a$ kein Verzweigungspunkt ist, sondern nur $z = b$, also $z$ eine geschlossene Linie beschrieben hat, die den Verzweigungspunkt dieser Grösse nicht enthält. Bezeichnet man mit $\alpha$ den Werth

$$\alpha = \cos \tfrac{2}{3} \pi + i \sin \tfrac{2}{3} \pi = \frac{-1 + i \sqrt{3}}{2},$$

sodass $\alpha$ eine Wurzel der Gleichung $\alpha^3 = 1$ ist, so kann man auch schreiben, da

$$\cos (\tfrac{1}{3} \varphi_0 + \tfrac{2}{3} \pi) + i \sin (\tfrac{1}{3} \varphi_0 + \tfrac{2}{3} \pi)$$
$$= (\cos \tfrac{1}{3} \varphi_0 + i \sin \tfrac{1}{3} \varphi_0) (\cos \tfrac{2}{3} \pi + i \sin \tfrac{2}{3} \pi) \text{ ist,}$$
$$w_2 = \alpha w_1.$$

Lässt man nun die Variable auf's Neue eine geschlossene Linie um den Punkt $a$ herum beschreiben, so geht jetzt $w$ mit dem Werthe $w_2 = \alpha w_1$ von $z_0$ aus und erlangt folglich nach Vollendung des Umlaufs den Werth

$$w_3 = \alpha w_2 = \alpha^2 w_1.$$

Nach einem dritten Umlaufe endlich erlangt $w$ den Werth $\alpha^3 w_1$, erhält also den ursprünglichen Werth $w_1$ wieder, da $\alpha^3 = 1$ ist. Wäre man, statt ursprünglich mit dem Werthe $w_1$ von $z_0$ auszugehen, zuerst mit dem Werthe $w_2$ ausgegangen, so hätte man nach resp. ein und zwei Umläufen die Werthe $w_3$ und $w_1$ erhalten; wäre aber $w_3$ der ursprüngliche Werth gewesen, so würde dieser in $w_1$ und $w_2$ übergegangen sein.

Aehnlich verhält es sich, wenn man $z$ eine geschlossene Linie beschreiben lässt, die nur den Punkt $b$ umgiebt. Man setze alsdann

$$z - b = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

und lasse $w$ mit dem Werthe $w_1$ von $z_0$ ausgehen, wo $w_1$ jetzt folgenden Ausdruck hat

$$w_1 = \frac{[b - a + r_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}{r_0^{\frac{1}{3}} (\cos \tfrac{1}{3} \varphi_0 + i \sin \tfrac{1}{3} \varphi_0)]}.$$

Nach einem Umlaufe des $z$ in der Richtung der wachsenden Winkel wird der Werth von $w$

$$= \frac{[b - a + r_0 (\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0)]^{\frac{1}{3}}}{r_0^{\frac{1}{3}} \cos(\frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}\pi) + i \sin(\frac{1}{3}\varphi_0 + \frac{2}{3}\pi))},$$

wobei sich jetzt der Zähler nicht geändert haben kann, weil der Verzweigungspunkt desselben, $a$, nicht umschrieben worden ist. Man erhält also jetzt für $w$ den Werth

$$\frac{w_1}{\alpha} = \alpha^2 w_1, \text{ d. h. den Werth } w_3.$$

Nach einem zweiten Umlaufe erhält man

$$\frac{w_1}{\alpha^2} = \alpha w_1, \quad \text{also } w_2;$$

endlich nach einem dritten Umlaufe stellt der ursprüngliche Werth $w_1$ sich wieder ein, da

$$\frac{w_1}{\alpha^3} = w_1$$

ist.

Man sieht hieraus, dass die Functionswerthe bei mehrmaligem Umkreisen eines Verzweigungspunktes sich cyclisch mit einander vertauschen. Beim Umkreisen des Punktes $a$ in der Richtung der wachsenden Winkel gehen

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

nach dem ersten Umlaufe der Reihe nach über in

$$w_2 \quad w_3 \quad w_1,$$

und nach dem zweiten Umlaufe in

$$w_3 \quad w_1 \quad w_2;$$

bei einem dritten Umlaufe stellen sich daher die ursprünglichen Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

wieder ein. Ebenso gehen beim Umkreisen des Punktes $b$ in der Richtung der wachsenden Winkel die Werthe

$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

in

$$w_3 \quad w_1 \quad w_2$$

und in

$$w_2 \quad w_3 \quad w_1$$

über und erhalten nach dem dritten Umlaufe die ursprünglichen Werthe

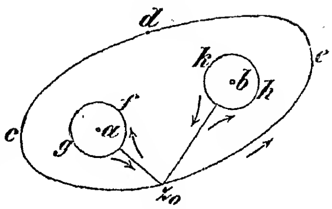
$$w_1 \quad w_2 \quad w_3$$

wieder.

Untersuchen wir nun noch, was eintritt, wenn $z$ eine geschlossene Linie beschreibt, welche beide Punkte, $a$ und $b$, enthält. Eine solche kann stets ohne Ueberschreitung eines dieser

Punkte in eine andere übergeführt werden, die aus einer successiven Umkreisung des einen und des andern besteht (Fig. 11). Man lässt dann $z$ zuerst von $z_0$ aus den Punkt $a$ umkreisen, nach $z_0$ zurückkehren und dann den Punkt $b$ umkreisen. Auf diesem Wege erhält $w$ bei der letzten Rückkunft nach $z_0$ denselben Werth, als wenn $z$ die geschlossene Linie um beide Verzweigungspunkte durchläuft (§ 9). Geht nun $w$ mit $w_1$ aus $z_0$ aus, so erhält es nach der Umkreisung von $a$ den Werth $\alpha w_1 = w_2$, alsdann nach der Umkreisung von $b$ den Werth $\frac{w_2}{\alpha} = w_1$; die Function bekommt also ihren ursprünglichen Werth wieder. Betrachtet man in dieser Beziehung statt der gegebenen Function die folgende

Fig. 11.




$$w' = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)},$$

bei welcher, wie man leicht übersehen wird, auch bei einer Umkreisung des Punktes $b$ dem ursprünglichen Functionswerthe der Factor $\alpha$ hinzugefügt wird, so geht bei der Umkreisung von $a$ $w_1'$ in $\alpha w_1' = w_2'$, und bei der Umkreisung von $b$, $w_2'$ in $\alpha w_2' = w_3'$ über. Ein Umlauf um beide Punkte verwandelt also $w_1'$ in $w_3'$; ein zweiter Umlauf wird daher $w_3'$ in $w_2'$, und ein dritter $w_2'$ in $w_1'$ verwandeln.

Viertes Beispiel. Die Function

$$w = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c},$$

welche die Wurzel der Gleichung des 6ten Grades

$$\begin{aligned}(z-b)^2 w^6 - 3\,(z-b)^2\,(z-c)\,w^4 - 2\,(z-a)\,(z-b)\,w^3 \\ + 3\,(z-b)^2\,(z-c)^2\,w^2 - 6\,(z-a)\,(z-b)\,(z-c)\,w \\ + (z-a)^2 - (z-b)^2\,(z-c)^3 = 0\end{aligned}$$

ist, hat die Punkte $a$, $b$, $c$, zu Verzweigungspunkten. Führt man der Kürze wegen

$$\sqrt[3]{z-a} = t,\quad \sqrt[3]{z-b} = u,\quad \sqrt{z-c} = v$$

ein und giebt dem Buchstaben $\alpha$ dieselbe Bedeutung wie in dem vorigen Beispiele, so kann man die 6 Functionswerthe folgendermassen schreiben:

$$w_1 = \frac{t}{u} + v \qquad w_4 = \frac{t}{u} - v$$

$$w_2 = \alpha\frac{t}{u} + v \qquad w_5 = \alpha\frac{t}{u} - v$$

$$w_3 = \alpha^2\frac{t}{u} + v \qquad w_6 = \alpha^2\frac{t}{u} - v$$

Betrachten wir nun zuerst Umläufe der Variablen um den Punkt $a$; dabei geht $t$ in $\alpha t$, $\alpha^2 t$, $t$, .... über, während $u$ und $v$ ungeändert bleiben; demnach geht über:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
| nach dem ersten Umlauf in | $w_2$ | $w_3$ | $w_1$ | | $w_5$ | $w_6$ | $w_4$ |
| „ „ zweiten „ „ | $w_3$ | $w_1$ | $w_2$ | | $w_6$ | $w_4$ | $w_5$ |
| „ „ dritten „ „ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$. |

Um diesen Verzweigungspunkt herum permutiren sich also nur die Werthe $w_1$, $w_2$, $w_3$ für sich, und $w_4$, $w_5$, $w_6$ für sich.

Bei Umläufen um den Punkt $b$ bleiben $t$ und $v$ ungeändert, und $u$ verwandelt sich in $\alpha u$, $\alpha^2 u$, $u$, $\cdots$. Also gehen über:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
| nach dem ersten Umlauf in | $w_3$ | $w_1$ | $w_2$ | | $w_6$ | $w_4$ | $w_5$ |
| „ „ zweiten „ „ | $w_2$ | $w_3$ | $w_1$ | | $w_5$ | $w_6$ | $w_4$ |
| „ „ dritten „ „ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$; |

hier permutiren sich also dieselben Functionswerthe, wie bei $a$, nur in umgekehrter Aufeinanderfolge.

Bei Umläufen um den Punkt $c$ endlich bleiben $t$ und $u$ ungeändert, und $v$ verwandelt sich in $-v$, $+v$, $\cdots$. Daher gehen hier über:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |
| nach dem ersten Umlauf in | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ | | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
| „ „ zweiten „ „ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | | $w_4$ | $w_5$ | $w_6$ |

In diesem Beispiele haben wir also erstlich zwei Verzweigungspunkte $a$ und $b$, um welche herum die drei Werthe $w_1$, $w_2$, $w_3$ cyclisch in einander übergehen, niemals aber in einen der drei übrigen Werthe; ebenso permutiren sich hier $w_4$, $w_5$, $w_6$ cyclisch unter einander und gehen nie in einen der drei ersteren über. Alsdann haben wir noch einen Verzweigungspunkt $c$, in welchem die drei Paare $w_1$, $w_4$; $w_2$, $w_5$; $w_3$, $w_6$ jedes unter sich ihre Werthe vertauschen, ohne dass jemals ein Werth aus einem andern Paare dazu träte.

Lässt man $z$ eine geschlossene Linie beschreiben, welche zwei Verzweigungspunkte umgiebt, so kann man eine solche wieder durch zwei successive Umkreisungen je eines Punktes ersetzen. Werden die Punkte $a$ und $b$ umschlossen, so verhält sich die Sache ebenso wie bei dem vorigen Beispiele, wir wollen daher nur Um-

läufe um $a$ und $c$ verfolgen und stellen das Ergebniss in folgender Tabelle zusammen:

| Umläufe. | um $a$ | um $c$ | um beide |
|---|---|---|---|
| 1 | $w_1$ geht über in $w_2$ | $w_2$ in $w_5$ | $w_1$ in $w_5$ |
| 2 | $w_5$ „ „ „ $w_6$ | $w_6$ „ $w_3$ | $w_5$ „ $w_3$ |
| 3 | $w_3$ „ „ „ $w_1$ | $w_1$ „ $w_4$ | $w_3$ „ $w_4$ |
| 4 | $w_4$ „ „ „ $w_5$ | $w_5$ „ $w_2$ | $w_4$ „ $w_2$ |
| 5 | $w_2$ „ „ „ $w_3$ | $w_3$ „ $w_6$ | $w_2$ „ $w_6$ |
| 6 | $w_6$ „ „ „ $w_4$ | $w_4$ „ $w_1$ | $w_6$ „ $w_1$ |

Dabei erreicht also $w$ seinen ursprünglichen Werth erst nach 6 Umläufen um die Punkte $a$ und $c$.

## § 11.

Die im Vorigen angestellten Betrachtungen zeigen, dass man bei einer mehrdeutigen Function, indem man der Variablen complexe Werthe zuertheilt und dieselbe eine Reihe stetig auf einander folgender Werthe durchlaufen lässt, die mit demselben Werthe endigen, mit dem sie begonnen haben (geometrisch ausgedrückt, indem man die Variable eine geschlossene Linie beschreiben lässt), von einem der Werthe, die eine Function für denselben Werth der Variablen anzunehmen vermag, zu einem andern auf stetige Weise übergehen kann. Es ist ferner gezeigt worden, dass eine bestimmte stetige Reihenfolge der Werthe der Variablen (ein bestimmter Weg) auch stets zu einem bestimmten Functionswerthe führt, mit alleiniger Ausnahme des Falles, wo der Weg der Variablen durch einen Verzweigungspunkt hindurch führt, ein Fall, der aber immer dadurch vermieden werden kann, dass man die Variable in der Nähe des Verzweigungspunktes eine beliebig kleine Ausbiegung machen lässt*). Hieran knüpft sich nun der natürliche Wunsch, sich von der Verschiedenheit der Werthe einer mehrdeutigen Function zu befreien, um eine solche wie eine eindeutige behandeln zu können. Nach den früheren Auseinandersetzungen ist hiezu nur erforderlich, dass man sich von der Verschiedenartigkeit der Wege befreie, welche die Variable zwischen zwei bestimmten Punkten durchlaufen kann. Nun bemerkte schon *Cauchy*, dass man dies, wenigstens in beschränkter Weise, dadurch erreichen könne, dass man gewisse Theile der Ebene, in welcher die Variable $z$ sich bewegend gedacht wird, abgrenzt und der Veränderlichen nicht gestattet, die Grenzen eines

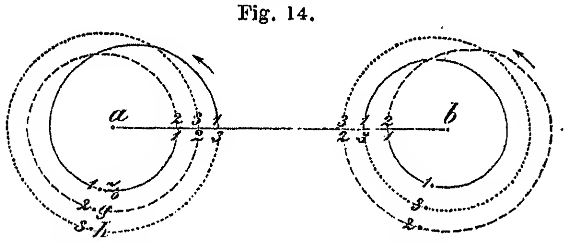
*) Betrachtet man in einem Falle, wo der Weg der Variablen durch einen Verzweigungspunkt hindurch führt, diese Lage des Weges als Grenzlage eines den Verzweigungspunkt nicht treffenden Weges, so wird die Unbestimmtheit aufgehoben.

schliessen (§ 9), so ist es stets leicht, ein Stück der $z$-Ebene abzugrenzen, innerhalb dessen von $z_0$ nach $z_1$ zwei solche Wege nicht möglich sind, oder durch Ziehen gewisser Linien, die nicht überschritten werden dürfen, solche Wege unmöglich zu machen. Innerhalb eines solchen Gebietes bleibt dann die Function eindeutig, da sie in jedem Punkte $z_1$ auf jedem Wege nur einen einzigen Werth erhält. *Cauchy* nannte dann die Function m o n o d r o m in diesem Gebiete, wofür *Riemann* das deutsche Wort e i n ä n d r i g setzte. Obwohl nun dieses Verfahren in vielen Fällen, z. B. bei der Auswerthung bestimmter Integrale, von grossem Nutzen ist, so wird doch auf diese Weise der Variablen eine Schranke auferlegt, welche man nicht immer einhalten kann, da die Untersuchungen oft über das Gebiet, innerhalb dessen eine Function einändrig ist, hinausführen. Daher hat *Riemann* ein anderes Mittel ersonnen, sich von der Mehrdeutigkeit der Functionen zu befreien, welches vollständig zum Ziele führt.

*Riemann* nimmt an, dass wenn eine Function $n$-deutig ist, also jedem Werthe der Variablen $n$ Werthe der Function zugehören, die Ebene der $z$ aus $n$ über einander liegenden Schichten oder Blättern bestehe (oder dass $n$ solche Blätter über der Ebene der $z$ ausgebreitet seien), welche zusammen das Gebiet für die Variable bilden. Jedem Punkte in jedem Blatte entspricht nur ein einziger Werth der Function, und den $n$ unmittelbar über einander liegenden Punkten aller $n$ Blätter die $n$ verschiedenen Werthe der Function, die demselben Werthe von $z$ angehören. In den Verzweigungspunkten nun, wo mehrere sonst verschiedene Functionswerthe einander gleich sind, hängen mehrere jener Blätter zusammen, sodass der betreffende Verzweigungspunkt zu gleicher Zeit in allen diesen zusammenhängenden Blättern liegend gedacht wird. Die Anzahl dieser so in einem Verzweigungspunkte zusammenhängenden Blätter kann für jeden Verzweigungspunkt verschieden sein und ist gleich der Anzahl der Functionswerthe, welche beim Umlaufe der Variablen um den Verzweigungspunkt cyclisch in einander übergehen. In dem letzten Beispiele des vorigen §, wo die Function 6-werthig ist, werden wir die $z$-Ebene als aus 6 Blättern bestehend annehmen. Um jeden der Verzweigungspunkte $a$ und $b$ herum gehen einerseits die Werthe $w_1$, $w_2$, $w_3$ und andrerseits die Werthe $w_4$, $w_5$, $w_6$ in einander über; daher nehmen wir an, dass in jedem dieser Punkte einerseits die Blätter 1, 2, 3, andrerseits die Blätter 4, 5, 6 zusammenhängen. Um den Punkt $c$ herum dagegen gehen erstens $w_1$ und

$w_4$, zweitens $w_2$ und $w_5$ und drittens $w_3$ und $w_6$ gegenseitig in einander über; daher hängen im Punkte $c$ einmal die Blätter 1 und 4, dann die Blätter 2 und 5, und endlich die Blätter 3 und 6 zusammen. Um nun den stetigen Uebergang eines Functionswerthes in einen andern zu vermitteln, werden sogenannte **Verzweigungsschnitte** geführt. Dies sind ganz beliebige, nur sich selbst nicht schneidende, Linien, welche entweder von einem Verzweigungspunkte aus ins Unendliche gehn, oder zwei Verzweigungspunkte mit einander verbinden. Ueber diese Verzweigungsschnitte hinüber denkt man sich nun die Blätter nicht so zusammenhängend, wie sie natürlich über einander liegen, sondern so, wie die Functionswerthe in einander übergehen. Legen wir z. B. in dem letzten Beispiele des vorigen § einen Verzweigungsschnitt von $a$ nach $b$ (Fig. 14), so lassen wir, indem wir den Punkt $a$ in der

Fig. 14.

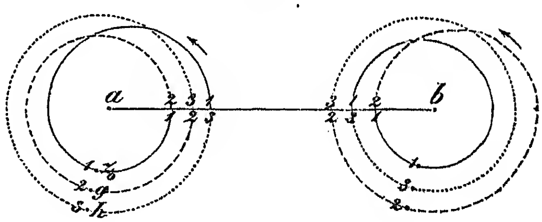



Richtung der wachsenden Winkel umkreisen, über den Verzweigungsschnitt hinüber das Blatt 1 mit dem Blatte 2, dann 2 mit 3 und endlich 3 wieder mit 1 zusammenhängen. Wir wollen die rechte Seite des Verzweigungsschnittes $\overline{ab}$ diejenige nennen, welche ein Beobachter zur Rechten hat, wenn er sich in $a$ befindet und nach $b$ hinsieht. Geht dann $z$ von einem Punkte $z_0$ im Blatte 1 ($w$ mit dem Werthe $w_1$) aus und umkreist den Punkt $a$ in der Richtung der wachsenden Winkel, so gelangt es, indem es den Verzweigungsschnitt von der Rechten zur Linken überschreitet, aus dem ersten Blatte in das zweite und befindet sich noch darin, wenn es nach $z_0$ zurück oder vielmehr in den unmittelbar unter $z_0$ im 2ten Blatte liegenden Punkt $g$ kommt, sodass jetzt $w$ den Werth $w_2$ erlangt hat. Wird dann der Kreislauf fortgesetzt, so gelangt $z$, wenn es zum zweiten Male den Verzweigungsschnitt von der Rechten zur Linken überschreitet, in das 3te Blatt und befindet sich noch darin, wenn es nach dem in diesem Blatte unter $z_0$ befindlichen Punkte $h$ gekommen ist; jetzt hat $w$ den Werth $w_3$ erhalten. Ueberschreitet endlich $z$ den Verzweigungsschnitt zum dritten Male, so nehmen wir an, dass nun die rechte Seite des 3ten Blattes sich durch das 2te Blatt hindurch mit der linken Seite des 1ten Blattes über den Verzweigungsschnitt hinüber verbinde, sodass dann $z$ aus

dem 3ten Blatte in das 1ste hinübertritt und dann wirklich wieder nach $z_0$ zurückgelangt. Jetzt erst ist die Linie wirklich geschlossen, und $w$ hat auch wieder seinen ursprünglichen Werth erlangt. In Fig. 14 sind die Linien mit den Nummern der Blätter bezeichnet, in denen sie verlaufen, und ausserdem die im 2ten und 3ten Blatte verlaufenden resp. gestrichelt und punktirt. Die Punkte $z_0$, $g$, $h$, welche eigentlich direct unter einander liegen sollen, sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet.

In ähnlicher Weise hat man sich die Sache bei allen Verzweigungspunkten zu denken, und da von jedem solchen Punkte ein Verzweigungsschnitt ausgeht, so kann die Variable den Verzweigungspunkt nicht umkreisen, ohne den Verzweigungsschnitt zu überschreiten und dadurch nach und nach in alle diejenigen Blätter zu gelangen, welche in dem Verzweigungspunkte zusammenhängen. Wie in jedem Falle die Verzweigungsschnitte zu legen sind, hängt von der zu untersuchenden Function ab und kann meist in verschiedener Weise gewählt werden. In unserem Beispiele darf man $a$ und $b$ durch einen solchen Schnitt verbinden, weil bei der Umkreisung des Punktes $b$ in der Richtung der wachsenden Winkel die Function $w_1$ in $w_3$, und diese in $w_2$ übergeht (Fig. 14), und daher

Fig. 14.




bei $b$ dieselben Blätter und in derselben Weise zusammenhängen wie bei $a$, nämlich die rechte Seite von 1 mit der linken von 2, die rechte Seite von 2 mit der linken von 3, und die rechte Seite von 3 mit der linken von 1.*)

*) Wenn man sich diese Vorstellungsweise durch ein Modell anschaulich machen will, so besteht eine Schwierigkeit einmal darin, dass die Blätter der Fläche einander durchdringen, und dann darin, dass häufig in den Verzweigungspunkten mehrere Blätter zusammenhängend gedacht werden müssen, die nicht unmittelbar übereinander liegen. Allein zum Zwecke der Veranschaulichung kommt es meistentheils nur darauf an, gewisse Linien in ihrem Verlaufe durch die verschiedenen Blätter der Fläche verfolgen zu können. Dies ist leicht in folgender Weise erreichbar: Man schneide zunächst in die über einander gelegten Papierblätter, welche die Fläche vorstellen sollen, die Verzweigungsschnitte ein und verbinde dann nur an

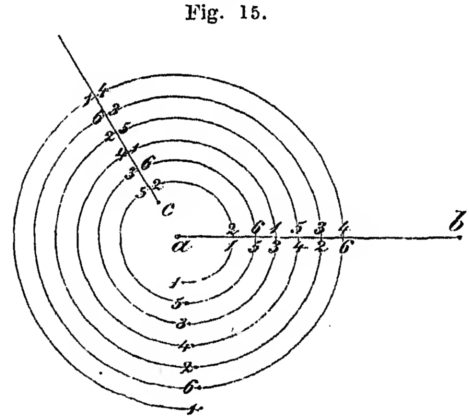
Bleiben wir noch bei diesem Beispiele stehen, und untersuchen wir auch den im vorigen § besprochenen Umlauf um $a$ und $b$ und um $a$ und $c$. Bei einem Umlauf um $a$ und $b$ wird der Verzweigungsschnitt gar nicht überschritten, sodass $z$ im ersten Blatte bleibt; in der That erhält nach einem solchen Umlauf $w$ in $z_0$ seinen Anfangswerth wieder (vgl. Beisp. 3. § 10). Um die Umkreisung der Punkte $a$ und $c$ zu untersuchen, legen wir von $c$ aus einen Verzweigungsschnitt ins Unendliche und lassen hier je zwei der Blätter 1, 4; 2, 5; 3, 6 gegenseitig in einander übergehen.

Für die hier stattfindenden Uebergänge der Functionswerthe hatten wir S. 49 folgende Tabelle gefunden:

| Umläufe. | um $a$ | um $c$ | um beide |
|---|---|---|---|
| 1 | $w_1$ geht über in $w_2$ | $w_2$ in $w_5$ | $w_1$ in $w_5$ |
| 2 | $w_5$ " " " $w_6$ | $w_6$ " $w_3$ | $w_5$ " $w_3$ |
| 3 | $w_3$ " " " $w_1$ | $w_1$ " $w_4$ | $w_3$ " $w_4$ |
| 4 | $w_4$ " " " $w_5$ | $w_5$ " $w_2$ | $w_4$ " $w_2$ |
| 5 | $w_2$ " " " $w_3$ | $w_3$ " $w_6$ | $w_2$ " $w_6$ |
| 6 | $w_6$ " " " $w_4$ | $w_4$ " $w_1$ | $w_6$ " $w_1$ |

Diese Uebergänge sind in Fig. 15 dargestellt, indem jede Linie mit der Nummer des Blattes bezeichnet ist, in welchem sie verläuft. Die eigentlich unter dem Ausgangspunkte 1 liegenden Punkte sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet, und den letzten Punkt 1 hat man sich mit dem ersten als zusammenfallend zu denken.

Fig. 15.




denjenigen Stellen, wo eine Linie aus einem Blatte über einen Verzweigungsschnitt in ein anderes Blatt hinübertreten soll, die betreffenden Blätter durch übergeklebte Papierstreifen. Dann kann man es immer so einrichten, dass wenn die Linie wieder in das erste Blatt, von welchem sie ausgegangen ist, zurückgelangen soll, man für die Anbringung eines zur Vermittlung dieses Ueberganges dienenden Papierstreifens den nöthigen Raum übrig hat. Durch diese übergeklebten Papierstreifen wird nun die Verbindung der einzelnen Blätter zu einer zusammenhängenden Fläche schon hergestellt; und es ist dann weiter nicht nothwendig, die Blätter in den Verzweigungspunkten an einander zu befestigen.

Dieses in unserem Beispiele aus 6 Blättern bestehende Gebiet für die Veränderliche $z$ bildet nun eine einzige zusammenhängende Fläche, indem die Blätter in den Verzweigungspunkten zusammenhängen und längs der Verzweigungsschnitte in einander übergehen. In dieser Fläche ist $w$ eine vollkommen eindeutige Function des Ortes in der Fläche, da sie in jedem Punkte der letzteren denselben Werth erlangt, auf welchem Wege auch die Variable zu dem Punkte gelangen möge. Beschreibt $z$ zwischen zwei Punkten zwei Wege, welche einen Verzweigungspunkt einschliessen, so muss einer von beiden nothwendig einen Verzweigungsschnitt überschreiten und dadurch in ein anderes Blatt gelangen, sodass die Endpunkte der beiden Wege nicht mehr als zusammenfallend, sondern als zwei verschiedene Punkte der $z$-Fläche zu betrachten sind, in denen dann auch verschiedene Functionswerthe statt haben. Beschreibt aber $z$ eine wirklich geschlossene Curve, d. h. fallen Anfangs- und Endpunkt der Curve in den nämlichen Punkt des nämlichen Blattes zusammen, so erhält auch die Function den Anfangswerth wieder. Nur wenn die Variable durch einen Verzweigungspunkt hindurch geht, kann sie nach Belieben in jedes der hier zusammenhängenden Blätter übergehen, und dann bleibt es unbestimmt, welchen Werth die Function annimmt. (§ 8.)

## § 12.

Um nun nachzuweisen, dass auch im Allgemeinen durch eine die $z$-Ebene $n$-fach bedeckende Fläche, deren einzelne Blätter in den Verzweigungspunkten und längs der Verzweigungsschnitte in der oben erläuterten Weise zusammenhängen, eine $n$-deutige Function in eine eindeutige verwandelt werden kann, nehmen wir zunächst die $z$-Ebene noch einfach an und lassen die Variable $z$ von einem beliebigen Punkte $z_0$ aus eine geschlossene Linie durchlaufen, welche nur einen Verzweigungspunkt einmal umgiebt und durch keinen anderen Verzweigungspunkt hindurch führt. In $z_0$ besitzt die Function $n$ Werthe; denken wir uns diese in irgend einer Reihenfolge aufgeschrieben. Hat nun die Variable die geschlossene Linie durchlaufen und ist wieder nach $z_0$ zurückgekehrt, so wird jeder der obigen $n$ Functionswerthe entweder in einen anderen übergegangen oder ungeändert geblieben sein. Diese neuen Werthe können, da die Variable $z$ sich wieder in dem Punkte $z_0$ befindet, von den früheren in ihrer Gesammtheit nicht verschieden sein; denken wir sie uns aber in der Reihenfolge aufgeschrieben, wie sie aus den früheren der Reihe nach entstanden sind, so werden sie jetzt in einer anderen Anordnung auftreten, als vorhin.

Nun kann aber jede beliebige Anordnung von $n$ Elementen aus einer anderen Anordnung durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen erzeugt werden. Unter einer **cyclischen Vertauschung** $p$**ter Ordnung** versteht man nämlich eine solche, bei welcher man aus den vorhandenen $n$ Elementen beliebige $p$ herausgreift und nun an die Stelle des ersten ein zweites, an Stelle dieses ein drittes u. s. w., endlich an Stelle des $p$ten wieder das erste setzt. Eine solche cyclische Vertauschung $p$ter Ordnung hat die Eigenschaft, dass nach $p$ Wiederholungen derselben, und nicht früher, die ursprüngliche Anordnung wieder zum Vorschein kommt; denn da an die Stelle jedes Elementes ein anderes, an die Stelle des $p$ten aber das erste tritt, so kann jedes Element erst dann wieder an seiner ursprünglichen Stelle erscheinen, wenn die sämmtlichen $p - 1$ anderen Elemente an derselben Stelle aufgetreten sind, dann aber tritt jedes Element auch wirklich wieder an seine ursprüngliche Stelle. Um nun nachzuweisen, dass jede Anordnung aus einer anderen durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen erzeugt werden kann, nehmen wir an, irgend eine Anordnung entstehe aus einer anderen so, dass an die Stelle eines Elementes, z. B. 1 ein anderes, z. B. 3, getreten sei. An die Stelle von 3 tritt dann entweder 1, und dann haben wir schon eine cyclische Vertauschung zweiter Ordnung, oder ein anderes z. B. 5. An die Stelle dieses letzteren tritt nun wieder entweder das erste 1, und dann haben wir eine cyclische Vertauschung dritter Ordnung, oder wiederum ein anderes, das nothwendig von den schon benutzten 1, 3, 5 verschieden sein muss. An die Stelle dieses kann entweder das erste treten, wodurch eine cyclische Vertauschung geschlossen wäre, oder wieder ein anderes; einmal aber muss die cyclische Vertauschung sich schliessen, weil überhaupt nur eine endliche Anzahl von Elementen vorhanden ist, und das erste Element 1 sich an irgend einer Stelle der zweiten Anordnung vorfinden muss. Auf diese Weise ist dann eine Reihe von Elementen abgefertigt. Beginnt man nun mit irgend einem der noch nicht verwendeten Elemente, so kann man das vorige Verfahren wiederholen, bis alle Elemente erschöpft sind, und hat so eine gewisse Anzahl cyclischer Vertauschungen erhalten, welche nach einander oder auch gleichzeitig angewendet, die zweite Anordnung aus der ersten erzeugen. Hat ein Element bei der zweiten Anordnung seine Stelle nicht geändert, so kann eine Nichtänderung als eine cyclische Vertauschung erster Ordnung angesehen werden. Ein Beispiel möge das Vorige erläutern. Seien die 11 Elemente

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11$$

in die Anordnung

$$3 \quad 11 \quad 5 \quad 2 \quad 7 \quad 10 \quad 1 \quad 9 \quad 6 \quad 8 \quad 4$$

übergegangen; so sieht man, dass nach der Reihe

1 3 5 7

in

3 5 7 1

übergegangen sind; diese bilden also eine cyclische Vertauschung vierter Ordnung. Geht man dann von 2 aus, so zeigt sich, dass

2 11 4

in

11 4 2

übergehen; also hat man eine zweite cyclische Vertauschung dritter Ordnung. Das nächste noch nicht verwendete Element ist 6. Dann geht

6 10 8 9

in

10 8 9 6

über, und man hat eine dritte cyclische Vertauschung vierter Ordnung. Jetzt sind alle 11 Elemente erschöpft, und folglich wird die zweite gegebene Anordnung aus der ersten durch die gefundenen drei cyclischen Vertauschungen erzeugt.

Kehren wir nun zu unseren Functionswerthen zurück, so folgt, dass, was auch immer für eine Anordnung derselben durch den Umlauf der Variablen um den Verzweigungspunkt entstanden sein mag, dieselbe durch eine Reihe cyclischer Vertauschungen der Functionswerthe hervorgebracht werden kann. Lässt man die Variable den nämlichen Verzweigungspunkt noch einmal umkreisen, so erleidet jeder Functionswerth die nämliche Aenderung wieder, die er das erste Mal erfuhr. Bei diesem zweiten Umlaufe bleiben also die Cyclen dieselben, wie bei dem ersten, und so auch bei jedem folgenden. Auf diese Weise theilen sich die Functionswerthe bei jedem Verzweigungspunkte (wenn sie nicht sämmtlich einen einzigen Cyclus bilden, was auch vorkommen kann, vgl. Beisp. 3. § 10) in eine Reihe von Cyclen, sodass in jedem Cyclus nur gewisse bestimmte Functionswerthe sich unter einander permutiren, ohne dass jemals ein in einem anderen Cyclus enthaltener Werth dazu treten kann (vgl. Beisp. 4. § 10). Wenn ein einzelner Functionswerth bei dem Umlaufe der Variablen um den Verzweigungspunkt sich nicht ändert, so kann ein solcher nach der obigen Bemerkung als für sich allein einen Cyclus erster Ordnung bildend angesehen werden. Lässt man jetzt die Variable $z$ eine ganz beliebige geschlossene Linie beschreiben, so kann diese in eine Reihe von Umkreisungen einzelner Verzweigungspunkte umgeformt werden (§ 9). Daher kann auch die durch diese geschlossene Linie entstehende Anordnung durch die bei den Verzweigungspunkten stattfindenden cyclischen Vertauschungen erzeugt werden.

Wenn nun die $z$-Fläche als aus $n$ Blättern bestehend angesehen wird, so rechtfertigt das Vorige zunächst die Annahme, dass in jedem Verzweigungspunkte bestimmte Gruppen von Blättern als zusammenhängend gedacht werden, welche über die Verzweigungs-

schnitte hinüber in der oben angegebenen Weise sich in einander fortsetzen. Die Variable gelangt dann, wenn sie einen Verzweigungspunkt umkreist, nach und nach in alle die Blätter, welche derselben Gruppe angehören, und nur in diese, und kehrt zuletzt in dasjenige Blatt zurück, von welchem sie ausgegangen ist. Bezeichnen wir jetzt die einen bestimmten Werth $z_0$ von $z$ repräsentirenden Punkte der $n$ Blätter der Reihe nach mit $z_1{}^0, z_2{}^0, \ldots. z_n{}^0$, sodass der Index zugleich das Blatt bezeichne, in welchem der Punkt sich befindet, so können zunächst die für $z_0$ statthabenden Functionswerthe beliebig auf die Blätter vertheilt werden, d. h. man kann in beliebig gewählter, aber bestimmter Weise annehmen, welcher dieser Functionswerthe jedem der Punkte $z_1{}^0, z_2{}^0, \ldots z_n{}^0$ angehören soll. Wir wollen diese Werthe der Reihe nach mit $w_1{}^0, w_2{}^0, \ldots. w_n{}^0$ bezeichnen. Alsdann aber bestimme man die in den einzelnen Verzweigungspunkten zusammenhängenden Blätter so, dass sie genau den früher erwähnten Cyclen entsprechen, in welche die Functionswerthe bei jedem Verzweigungspunkte sich theilen. Wenn also in der einfachen $z$-Ebene bei einmaliger Umkreisung eines Verzweigungspunktes $w_\alpha{}^0$ in $w_\beta{}^0$, $w_\varkappa{}^0$ in $w_\lambda{}^0$ u. s. w. übergeführt wird, so bestimme man in der $n$-blättrigen Fläche den Zusammenhang der Blätter so, dass bei einmaliger Umkreisung des nämlichen Verzweigungspunktes die Variable von $z_\alpha{}^0$ nach $z_\beta{}^0$, von $z_\varkappa{}^0$ nach $z_\lambda{}^0$, u. s. w. gelangt. Erleidet ein einzelner Functionswerth $w_\mu{}^0$ dabei keine Aenderung, so wird das entsprechende Blatt $\mu$ in diesem Verzweigungspunkte mit keinem anderen Blatte in Zusammenhang gesetzt. Ist diese Bestimmung einmal festgestellt, so vertheilen sich nun die Functionswerthe für jeden Werth von $z$ in bestimmter Weise auf die $n$ Blätter. Um dies nachzuweisen, braucht man, da in der einfachen $z$-Ebene die verschiedenen Werthe, welche die Function in einem und demselben Punkte $z$ haben kann, nur durch die verschiedenen nach $z$ führenden Wege hervorgebracht werden, nur zu zeigen, dass, wenn man in der $n$-blättrigen Fläche von einem bestimmten Punkte, etwa von $z_1{}^0$ aus, und mit dem bestimmten Werthe $w_1{}^0$ beginnend auf irgend zwei verschiedenen Wegen nach dem nämlichen beliebig gewählten Punkte $z_\lambda$ gelangt, man immer auf beiden Wegen zu demselben Functionswerthe geführt wird. Wir müssen bei diesem Nachweise verschiedene Fälle unterscheiden:

1) Nehmen wir zuerst an, der Endpunkt eines von $z_1{}^0$ ausgehenden Weges sei einer der den Werth $z_0$ repräsentirenden Punkte, also etwa $z_\lambda{}^0$. Dann bildet der entsprechende Weg in der einfachen $z$-Ebene eine geschlossene Linie. Diese kann in eine Reihe von geschlossenen Umläufen um einzelne Verzweigungspunkte umgeformt werden, ohne dass der Endwerth der Function ein an-

derer wird. Dem entspricht in der $n$-blättrigen Fläche, dass die Variable ebenfalls einzelne Verzweigungspunkte umkreist und sich bei jeder Umkreisung zu demjenigen der Punkte $z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0$ begiebt, den sie bei dieser erreichen kann. Die Punkte, zu denen sie auf diese Weise gelangt, mögen der Reihe nach mit $z_1^0$, $z_\alpha^0$, $z_\beta^0, \ldots z_\varkappa^0$, $z_\lambda^0$ bezeichnet werden. Nach dem, was oben über die Vertheilung der Functionswerthe festgesetzt wurde, und da hier immer nur einmalige Umläufe um je einen Verzweigungspunkt in Betracht kommen, nimmt dann $w$ der Reihe nach die Werthe $w_1^0$, $w_\alpha^0$, $w_\beta^0, \ldots w_\varkappa^0$, $w_\lambda^0$ an. Mit irgend einem anderen in $z_1^0$ beginnenden und in $z_\lambda^0$ endigenden Wege kann nun die nämliche Umformung vorgenommen werden, doch wird jetzt die Variable im Allgemeinen in andere Blätter gelangen als vorhin. Nehmen wir an, die Umkreisungen führen die Variable von $z_1^0$ nach und nach zu $z_a^0$, $z_b^0, \ldots z_k^0$ und schliesslich nach $z_\lambda^0$; dann ist die entsprechende Reihe der Functionswerthe $w_1^0$, $w_a^0$, $w_b^0 \ldots w_k^0$, und da der letzte Umlauf der Annahme nach von $z_k^0$ nach $z_\lambda^0$ führt, so muss schliesslich auch $w_k^0$ nach $w_\lambda^0$ übergeführt werden. Wir geben hierzu ein Beispiel.

Bei der § 11 vorgeführten 6-blättrigen Fläche kann man z. B. von $z_1^0$ nach $z_3^0$ kommen, indem man den Punkt $a$ zwei Mal umkreist, wodurch man von $z_1^0$ nach $z_2^0$ und $z_3^0$ gelangt. Man kann aber unter anderen auch folgenden Weg einschlagen: von $z_1^0$ um $a$ nach $z_2^0$, dann um $c$ nach $z_5^0$, dann um $a$ nach $z_6^0$, und zuletzt um $c$ nach $z_3^0$. Bei dem ersten Wege durchläuft $w$ die Werthe $w_1^0$, $w_2^0$, $w_3^0$; bei dem zweiten $w_1^0$, $w_2^0$, $w_5^0$, $w_6^0$, $w_3^0$, der Endwerth aber ist auf beiden Wegen derselbe. — Als speciellen Fall heben wir hervor, dass, wenn die Variable auf irgend einem Wege wieder nach dem Ausgangspunkte $z_1^0$ zurückgelangt, die Function auch den ursprünglichen Werth $w_1^0$ wieder erhält.

2) Wir betrachten ferner zwei dieselben Punkte verbindenden Wege $A$ und $B$, welche ganz in einem und demselben Blatte verlaufen, also z. B. wenn wir $z_1^0$ wieder als Ausgangspunkt annehmen, ganz in dem Blatte 1. Wenn dann die beiden Wege keinen Verzweigungspunkt einschliessen, so ist eine besondere Erörterung nicht nöthig, da die entsprechenden Wege in der einfachen $z$-Ebene auch keinen Verzweigungspunkt einschliessen, und daher zu demselben Functionswerthe führen (§ 9). Wenn aber die betrachteten Wege Verzweigungspunkte einschliessen, so bemerke man, dass dieser Fall nur dann eintreten kann, wenn von keinem der eingeschlossenen Verzweigungspunkte aus ein Verzweigungsschnitt in's Unendliche geht, denn sonst müsste mindestens einer der Wege den Verzweigungsschnitt überschreiten und könnte nicht ganz in demselben Blatte verlaufen. Es kann also der vorliegende Fall

nur dann eintreten, wenn mehrere Verzweigungspunkte von den beiden Wegen umschlossen werden, und jeder Verzweigungsschnitt zwei Verzweigungspunkte mit einander verbindet. Wenn man nun in der einfachen $z$-Ebene dem einen Wege, z. B. $B$, Umläufe um alle eingeschlossenen Verzweigungspunkte vorhergehen lässt, so erhält man einen neuen Weg $C$, welcher zu demselben Functionswerthe führt, wie $A$. Führt man aber diese Umläufe in der $n$-blättrigen Fläche aus, so führen diese wieder nach $z_1^0$ zurück, denn jeder Verzweigungsschnitt verbindet zwei Verzweigungspunkte; bei der auf einander folgenden Umkreisung der letzteren muss also der Verzweigungsschnitt zweimal in entgegengesetzter Richtnng überschritten werden; man gelangt daher immer wieder in das Blatt 1 und demnach schliesslich auch nach $z_1^0$ zurück. Nach dem, was in dem vorhergehenden Falle bewiesen wurde, erlangt dann auch die Function in $z_1^0$ wieder den Werth $w_1^0$. Da nun aber der Weg $C$, welcher aus den Umkreisungen und dem Wege $B$ besteht, zu demselben Werthe führt, wie $A$, und die Function den Weg $B$ mit dem Werthe $w_1^0$ beginnt, so muss auch dieser allein zu demselben Werthe führen, wie $A$.

3) Schliesslich nehmen wir als Endpunkt der zu untersuchenden Wege irgend einen in einem beliebigen Blatte $\lambda$ liegenden Punkt $z_\lambda$ an. Der Anfangspunkt sei wie vorhin $z_1^0$. Man kann zunächst einem solchen Wege ohne Aenderung des Endwerthes der Function einen anderen substituiren, welcher zuerst nach $z_\lambda^0$ und dann ganz im Blatte $\lambda$ verlaufend nach $z_\lambda$ führt; denn man kann bei den entsprechenden Wegen in der einfachen $z$-Ebene das Endstück des zweiten immer so wählen, dass dieser in den ersten umgeformt werden kann, ohne dass ein Verzweigungspunkt überschritten zu werden braucht. Macht man nun dieselbe Umformung bei zwei verschiedenen Wegen, so führen beide zuerst nach $z_\lambda^0$; hier erlangt die Function auf beiden Wegen nach 1) den Werth $w_\lambda^0$. Die noch übrigen Theile der beiden Wege verlaufen ganz in dem Blatte $\lambda$, beginnen in demselben Punkte $z_\lambda^0$ und mit dem nämlichen Functionswerthe $w_\lambda^0$, also führen auch beide nach 2) zu demselben Functionswerthe in $z_\lambda$.

Hiedurch ist nachgewiesen, dass, nachdem die obigen willkürlich zu wählenden Feststellungen gemacht sind, die Function in jedem Punkte der Fläche einen bestimmten von dem Wege unabhängigen Werth erhält und zu einer eindeutigen Function des Ortes in der Fläche wird. Dadurch ist dann die Vieldeutigkeit der algebraischen Functionen*) aufgehoben, und wir werden nun im Fol-

*) Man kann zwar auch solchen Functionen wie $\log z$, $\operatorname{arctg} z$, u. s. w. Verzweigungspunkte zuschreiben, allein dann müsste man annehmen, dass

genden stets annehmen, dass das Gebiet der Veränderlichen aus so vielen Blättern bestehe, als nöthig sind, um eine zu betrachtende vieldeutige Function in eine eindeutige zu verwandeln, und werden zwei Punkte nur dann als identisch betrachten, wenn sie auch demselben Blatte der Fläche angehören. Demgemäss nennen wir eine Linie nur dann wirklich geschlossen, wenn ihr Anfangs- und Endpunkt in dem nämlichen Punkte des nämlichen Blattes zusammenfallen. Endigt dagegen eine Linie in einem Punkte, der unter oder über dem Anfangspunkte in einem anderen Blatte liegt, so nennen wir die Linie scheinbar geschlossen.

## § 13.

An das Vorige knüpfen sich noch einige Bemerkungen. Beim Ueberschreiten eines Verzweigungsschnittes setzt sich, wie erläutert worden ist, ein Blatt in ein anderes fort, in der Art, dass wenn die Variable sich auf demselben fortbewegt, die Function sich stetig ändert. Daraus folgt, was wohl zu beachten ist, dass die Function in dem nämlichen Blatte zu beiden Seiten eines Verzweigungsschnittes immer verschiedene Werthe hat. Nehmen wir z. B. an, über einen Verzweigungsschnitt hinüber setze sich ein Blatt $\varkappa$ in ein anderes $\lambda$ fort, und es seien $z_\varkappa$ und $z_\lambda$ zwei denselben Werth von $z$ repräsentirende Punkte, welche in resp. $\varkappa$ und $\lambda$ und in unendlicher Nähe des Verzweigungsschnittes liegen. Ferner sei $z_\varkappa'$ der Punkt, welcher in $\varkappa$ dem $z_\varkappa$ auf der anderen Seite des Verzweigungsschnittes und in unendlicher Nähe desselben gerade gegenüberliegt. Alsdann gelangt die Variable bei der Umkreisung des betreffenden Verzweigungspunktes von $z_\varkappa$ über $z_\varkappa'$ nach $z_\lambda$. Demnach bilden $z_\varkappa'$ und $z_\lambda$ eine stetige Aufeinanderfolge, nicht aber $z_\varkappa$ und $z_\lambda$. Bezeichnen nun $w_\varkappa$, $w_\varkappa'$, $w_\lambda$ die resp. in $z_\varkappa$, $z_\varkappa'$, $z_\lambda$ stattfindenden Functionswerthe, so bildet $w_\lambda$ die stetige Fortsetzung von $w_\varkappa'$, und nicht von $w_\varkappa$, und lässt man den zwischen $w_\lambda$ und $w_\varkappa'$ stattfindenden unendlich kleinen Unterschied ausser Acht, so kann man sagen, es ist $w_\varkappa' = w_\lambda$; da aber $w_\lambda$ von $w_\varkappa$ verschieden ist, so sind auch $w_\varkappa$ und $w_\varkappa'$ von einander verschieden. Bei der Function $w = \sqrt{z}$ z. B. besteht die Fläche aus zwei Blättern, die in dem Verzweigungspunkte $z = 0$ zusammenhängen. Hier ist $w_\lambda = - w_\varkappa$ (vgl. § 10. Beisp. 1) und also auch $w_\varkappa' = - w_\varkappa$. In diesem Beispiele besitzen daher zu beiden Seiten des Verzwei-

in einem Verzweigungspunkte unendlich viele Blätter der Fläche zusammenhängen. Wir werden daher die genannten Functionen später unter dem Gesichtspunkte von Integralfunctionen betrachten.

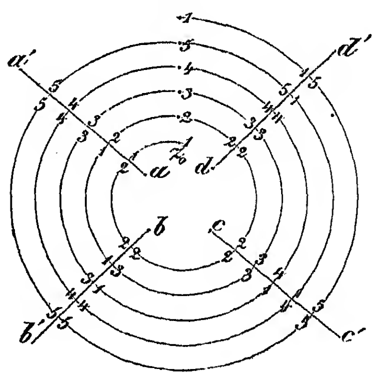
gungsschnittes die Functionswerthe in dem nämlichen Blatte entgegengesetzte Vorzeichen.

*Riemann* nennt die Verzweigungspunkte auch **Windungspunkte**, weil die Fläche sich um einen solchen Punkt wie eine Schraubenfläche von unendlich kleiner Ganghöhe herumwindet. Hängen dann in einem solchen Punkte nur zwei Blätter der Fläche zusammen, so heisst derselbe ein **einfacher Verzweigungspunkt** oder ein **Windungspunkt erster Ordnung**, hängen aber in ihm $n$ Blätter der Fläche zusammen, so heisst er ein **Windungspunkt** $(n-1)$**ter Ordnung**. Für manche Untersuchungen ist es nun wichtig zu zeigen, dass ein Windungspunkt $(n-1)$ter Ordnung so angesehen werden kann, als wenn in ihm $n-1$ einfache Verzweigungspunkte zusammengefallen wären. Nehmen wir beispielsweise $n=5$ an, so gelangt bei einem Verzweigungspunkte, in welchem 5 Blätter zusammenhängen, die Variable nach jedem Umlaufe in das nächstfolgende Blatt, und eine Curve muss 5 Umläufe um den Verzweigungspunkt machen, ehe sie wieder in das erste zurückgelangt und sich schliesst. Dasselbe findet aber auch statt, wenn man 4 einfache Verzweigungspunkte $a$, $b$, $c$, $d$ annimmt, in welchen der Reihe nach folgende Blätter zusammenhängen:

| in | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 und 2 | 1 und 3 | 1 und 4 | 1 und 5. |

In Fig. 16 sind $aa'$, $bb'$, $cc'$, $dd'$ die Verzweigungsschnitte, und die Zahlen bedeuten die Nummern der Blätter, in welchen die Linien verlaufen. Ueberschreitet die Curve von $z_0$ aus den Schnitt $aa'$, so tritt sie aus 1 in 2 und bleibt bei dem ganzen Umlauf in 2, weil dies Blatt in keinem der Punkte $b$, $c$, $d$ mit einem anderen zusammenhängt. Beim ersten Umlaufe kommt also die Curve aus 1 in 2. Wird nun $aa'$ zum zweiten Male überschritten, so tritt sie aus 2 in 1 und dann bei $bb'$ aus 1 in 3. Dann aber bleibt sie bis zur Rückkunft nach $z_0$ in 3, also bringt der 2te Umlauf sie nach 3. Erst bei $bb'$ tritt sie wieder aus 3 in 1 und dann bei $cc'$ aus 1 in 4. In dieser Weise bringt jeder neue Umlauf die Curve in das nächstfolgende Blatt; nach dem 5ten Umlaufe gelangt sie daher in das erste Blatt zurück und

Fig. 16.



schliesst sich. Man sieht also, dass die Uebergänge hier in derselben Weise stattfinden, wie bei einem Windungspunkte 4ter Ordnung. Lässt man daher die vier einfachen Verzweigungspunkte so wie auch die Verzweigungsschnitte sich einander nähern und schliesslich zusammenfallen, so bleibt alles ungeändert. Es zeigt sich zugleich in diesem einfachen Falle, dass die Anzahl der Umläufe, welche eine Curve um ein Gebiet machen muss, um sich zu schliessen, um 1 grösser ist, als die Anzahl der in diesem Gebiete enthaltenen einfachen Verzweigungspunkte, da der Windungspunkt 4ter Ordnung 4 einfachen Verzweigungspunkten äquivalent ist. Es soll später gezeigt werden, dass diese Beziehung allgemein gilt.

## § 14.

Es scheint hier der geeignete Ort zu sein, einer Vorstellungsart Erwähnung zu thun, welche auch im Unendlichen entweder eine bestimmte Fortschreitung oder eine Verzweigung möglich macht. Nach *Riemann* kann man sich nämlich die Ebene, deren Punkte die Werthe einer veränderlichen Grösse darstellen, im Unendlichen geschlossen, als eine Kugel mit unendlich grossem Radius denken. Der unendlich entfernte Punkt kann dann als ein ganz bestimmter in dieser geschlossenen Fläche aufgefasst werden. Besteht nun eine Fläche aus $n$ Blättern, so ist jedes als im Unendlichen geschlossen, als eine Kugelfläche mit unendlich grossem Radius zu denken, und in jeder dieser Kugelflächen nimmt der unendlich entfernte Punkt eine bestimmte Stelle ein. Dann ist es auch denkbar, dass mehrere Blätter in dem Punkte $\infty$ zusammenhängen, und dass dieser ein Verzweigungspunkt ist. Um bei einer durch einen Ausdruck gegebenen Function $w = f(z)$ zu entscheiden, ob $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt ist, braucht man nur $z = \frac{1}{u}$ zu setzen. Geht dann $f(z)$ in $\varphi(u)$ über, so liefert jeder Verzweigungspunkt $z = a$ von $f(z)$ für $\varphi(u)$ einen Verzweigungspunkt $u = \frac{1}{a}$, und umgekehrt jeder Verzweigungspunkt $u = b$ von $\varphi(u)$ einen solchen $z = \frac{1}{b}$ von $f(z)$; daher ist $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt von $f(z)$ oder nicht, je nachdem $u = 0$ ein Verzweigungspunkt von $\varphi(u)$ ist oder nicht. Bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche, bei welcher $z = \infty$ ein bestimmter Punkt ist, kann man nicht mehr einen unbestimmt in's Unendliche gehenden Verzweigungsschnitt ziehen, sondern, wenn ein solcher in's Unendliche geht, so endet er in dem bestimmten Punkte $z = \infty$. Zur Erläuterung dieser Vorstellungsart geschlossener

Flächen und einiger dabei zur Sprache kommender Nebenumstände mögen ein Paar Beispiele vorgeführt werden, wobei wir uns in Betreff der Bezeichnungen der Kürze wegen auf die in § 10 und 11 angewendeten beziehen.

1) Die schon betrachtete Function

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c}$$

geht durch die Substitution $z = \frac{1}{u}$ in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{\frac{1-au}{1-bu}} + \frac{\sqrt{1-cu}}{\sqrt{u}}$$

über, daher ist $u = 0$ und also auch $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt, und zwar hängen, wie man sieht, hier dieselben Blätter zusammen, wie im Punkte $c$. Man wird daher einen Verzweigungsschnitt von $a$ nach $b$, und einen zweiten von $c$ nach $\infty$ ziehen.

2) Die Function

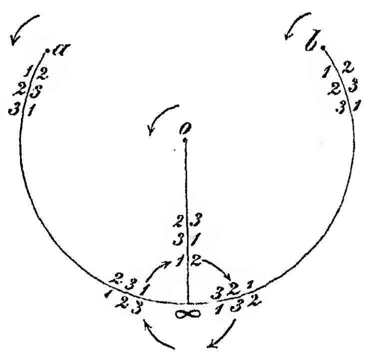
$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{(z-a)(z-b)}{z^2}}$$

geht in

$$\varphi(u) = \sqrt{(1-au)(1-bu)}$$

über; daher ist $z = \infty$ kein Verzweigungspunkt, sondern nur die Punkte 0, $a$ und $b$. Von jedem dieser Punkte kann ein Verzweigungsschnitt in's Unendliche gezogen werden. Nimmt man aber die Flächen als im Unendlichen geschlossen an, so treffen diese drei Verzweigungsschnitte im Punkte $\infty$ zusammen (Fig. 17). Dann gehen über den Theil $a\infty$ hinüber die Blätter in anderer Weise in einander über, wie über den Theil $b\infty$, nämlich so wie die Zahlen in der Figur es andeuten.

Fig. 17.

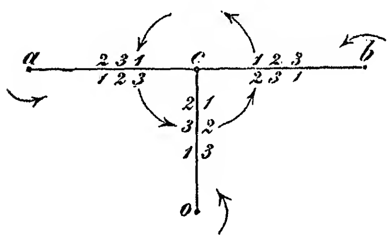



Um den Verzweigungspunkt 0 in der Richtung der wachsenden Winkel herum geht $f(z)$ in $\frac{f(z)}{\alpha^2} = \alpha f(z)$, also 1 in 2 und daher auch 2 in 3, und 3 in 1 über. Umkreist man nun den Punkt $\infty$, so geht beim Ueberschreiten von $0\infty$,

1 in 2, dann beim Ueberschreiten von $b\infty$, 2 in 3, und endlich beim Ueberschreiten von $a\infty$, 3 in 1 über. Hier kommt man also schon nach dem ersten Umlauf in das erste Blatt zurück, die Function ändert ihren Werth nicht, und der Punkt $\infty$ ist daher wirklich kein Verzweigungspunkt.

Man hätte hier auch die Punkte $a$ und $b$ durch einen in der Endlichkeit verlaufenden Verzweigungsschnitt verbinden können (Fig. 18). Dann muss es aber auf dieser Linie einen Punkt $c$ geben, wo die Scheidung stattfindet, sodass über $ac$ hinüber die Blätter in anderer Weise zusammenhängen, als über $bc$. Legt man dann den zweiten Verzweigungsschnitt von 0 nach $c$, so bleibt auch beim Umkreisen des Punktes $c$ die Function ungeändert, sodass $c$ kein Verzweigungspunkt ist. Man kann hier die Sache in ähnlicher Weise, wie es im 2ten Beispiele des § 10 schon erläutert wurde, so ansehen, als wenn der Punkt $c$ durch das Zusammenfallen dreier Verzweigungspunkte $d$, $e$, $f$ entstanden wäre, welche sich gegenseitig aufgehoben haben, sodass die gegebene Function aus der folgenden

Fig. 18.




$$\sqrt[3]{\frac{z-a}{z-d} \cdot \frac{z-b}{z-e} \cdot \frac{(z-f)^2}{z^2}}$$

dadurch entstanden gedacht wird, dass $d = e = f = c$ geworden ist.

Man kann hier die Verzweigungsschnitte auch noch auf eine dritte Art wählen, indem man einen solchen von $a$ nach 0, und einen zweiten von 0 nach $b$ zieht.

3) Die Function

$$f(z) = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$$

geht in

$$\varphi(u) = \sqrt[3]{\frac{(1-au)(1-bu)}{u^2}}$$

über, daher ist $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt. Man kann hier einen Verzweigungsschnitt von $a$ nach $\infty$ und einen zweiten von $b$ nach $\infty$ legen (Fig. 19), und die Blätter so zusammenhängen

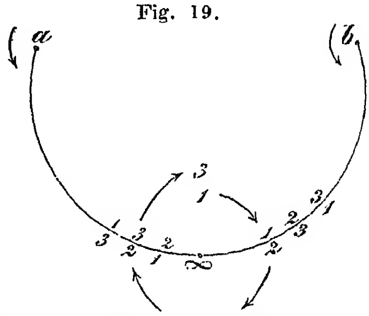
lassen, wie die Figur andeutet. Ein Umkreisen des Punktes $\infty$ führt dann zuerst über $b\infty$ von 1 nach 2, und dann über $a\infty$ von 2 nach 3, also bei einem Umlaufe von 1 nach 3, sodass die Function sich ändert, und $z = \infty$ wirklich als Verzweigungspunkt auftritt. Man bemerke dabei, dass wenn die Bewegungsrichtung auch hier die der wachsenden Winkel sein soll, die Umkreisung von $\infty$ aus gesehen in entgegengesetzter Richtung stattfinden muss. Denn setzt man

$$u = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

so folgt

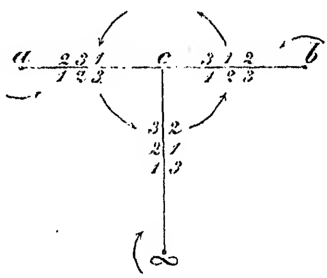
$$z = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Fig. 19.



Beschreibt also $u$ einen Kreis um den Nullpunkt mit kleinem Radius und in der Richtung der abnehmenden Winkel, so beschreibt $z$ einen Kreis mit grossem Radius und in der Richtung der wachsenden Winkel. In diesem Falle geht $\varphi(u)$ bei einem Umlauf in $\alpha^2\varphi(u)$, also auch $f(z)$ in $\alpha^2 f(z)$ über, d. h. man kommt aus 1 nach 3, wie es die Figur zeigt.

Fig. 20.



Man kann auch hier die Punkte $a$ und $b$ durch einen im Endlichen verlaufenden Verzweigungsschnitt verbinden, darauf einen Scheidungspunkt $c$ annehmen und von diesem einen zweiten Verzweigungsschnitt nach $\infty$ ziehen (Fig. 20). Auch dann ändert sich die Function beim Umkreisen des Punktes $c$ nicht.

4) Beachtung verdient auch das früher pag. 33 angeführte Beispiel, bei welchem die Function $w$ durch die cubische Gleichung

$$w^3 - w + z = 0$$

gegeben ist. Setzt man hier wie oben

$$p = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-z - \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}}\right)}, \quad q = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-z + \sqrt{z^2 - \tfrac{4}{27}}\right)},$$

wobei

$$pq = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

ist, so werden die drei Functionswerthe ausgedrückt durch

$$w_1 = p + q$$
$$w_2 = \alpha p + \alpha^2 q$$
$$w_3 = \alpha^2 p + \alpha q.$$

Man hat hier zunächst die beiden Verzweigungspunkte $z = +\frac{2}{\sqrt{27}}$ und $z = -\frac{2}{\sqrt{27}}$, bei welchen jedes Mal zwei Blätter der Fläche zusammenhängen; sodann aber ist auch $z = \infty$ Verzweigungspunkt, denn setzt man $z = \frac{1}{u}$, so wird

$$p = \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{1-\frac{4u^2}{27}}}{2u}},$$

für $u = 0$ ist also $p = \infty$ und daher wegen (1) $q = 0$. In $z = \infty$ werden demnach alle drei Functionswerthe unendlich gross, sodass hier alle drei Blätter zusammenhängen. Es scheint nun auf den ersten Blick, als wenn die beiden ersten Verzweigungspunkte $\pm\frac{2}{\sqrt{27}}$ sich ganz gleich verhalten müssten, sodass in beiden die nämlichen Blätter der Fläche zusammenhängen, allein bei dieser Annahme gelingt es nicht, die Verzweigungsschnitte so anzubringen, dass die Functionswerthe sich in der richtigen Weise auf der Fläche vertheilen. In der That ist diese Annahme auch nicht zulässig. Um dies einzusehen, braucht man, da die beiden ersten Verzweigungspunkte reell sind, und der Punkt $z = \infty$ auch auf der Hauptaxe angenommen werden kann, nur die reellen Werthe von $z$ zu verfolgen, und bringe den Ausdruck für die Wurzeln $w$ auf diejenige Form, die man ihm bei dem irreductibeln Falle der cubischen Gleichung giebt. Man schreibe also

$$p = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-z - \frac{2}{\sqrt{27}}\sqrt{\frac{27z^2}{4} - 1}\right)}$$

und setze

$$z = \frac{2}{\sqrt{27}} \cos 3v.$$

Dann erhält man

$$p = \sqrt[3]{-\frac{1}{\sqrt{27}}(\cos 3v + i \sin 3v)} = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,(\cos v + i \sin v);$$

die drei Werthe von $p$ sind also

$$p = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,e^{iv}, \quad = -\alpha\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,e^{iv}, \quad = -\alpha^2\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,e^{iv}$$

Da ausserdem $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $\alpha^2 = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$ gesetzt werden kann, so erhält man

$$w_1 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,(e^{iv} + e^{-iv})$$

$$w_2 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,(e^{i(v+\frac{2\pi}{3})} + e^{-i(v+\frac{2\pi}{3})})$$

$$w_3 = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,(e^{i(v-\frac{2\pi}{3})} + e^{-i(v-\frac{2\pi}{3})})$$

oder

$$w_1 = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cos v$$

$$w_2 = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cos\left(v + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$w_3 = -2\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cos\left(v - \frac{2\pi}{3}\right).$$

So lange $v$ reell bleibt, durchläuft $z$ die reellen Werthe, die numerisch kleiner als $\frac{2}{\sqrt{27}}$ sind, der Punkt $z$ also die Strecke zwischen den beiden einfachen Verzweigungspunkten; für rein imaginäre Werthe von $v$ wird $z$ numerisch grösser als $\frac{2}{\sqrt{27}}$, und erst für complexe Werthe von $v$ nimmt $z$ imaginäre Werthe an. Für unseren Zweck kommt es demnach wesentlich auf die reellen Werthe von $v$ an. Dabei ist aber zu beachten, dass $z$ als eine periodische Function von $v$ eingeführt ist. Will man daher etwas Bestimmtes haben, und die Variable $z$ die Strecke zwischen den beiden einfachen Verzweigungspunkten nur einmal durchlaufen lassen, so muss man eine bestimmte Periode wählen und diese allein betrachten. Nehmen wir also an, damit $z$ die reellen Werthe von $+\frac{2}{\sqrt{27}}$ bis $-\frac{2}{\sqrt{27}}$ durchlaufe, dass $3v$ sich von $0$ bis $\pi$, und $v$ daher von $0$ bis $\frac{\pi}{3}$ bewege. Man erhält dann die folgenden zusammengehörigen Werthe von $v$, $z$, $w_1$, $w_2$, $w_3$:

| $v$ | $z$ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $+\frac{2}{\sqrt{27}}$ | $-2\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $+\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $+\sqrt{\frac{1}{3}}$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $0$ | $-1$ | $+1$ | $0$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{2}{\sqrt{27}}$ | $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $+2\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ |

Bezeichnet man nun der Kürze wegen die Verzweigungspunkte $+\frac{2}{\sqrt{27}}$ und $-\frac{2}{\sqrt{27}}$ mit $e$ und $e'$, so zeigt sich, dass der gewählten Periode von $v$ gemäss in $e$ allerdings die beiden Functionswerthe $w_2$ und $w_3$ zusammenfallen; wenn aber $z$ nach $e'$ gelangt ist, so tritt dies nicht wieder ein, sondern es ist nun $w_1$ gleich $w_3$ geworden. Demgemäss hat man anzunehmen, dass in $e$ die Blätter 2 und 3, in $e'$ aber die Blätter 1 und 3 zusammenhängen. Jetzt hat die Anbringung der Verzweigungsschnitte keine Schwierigkeit mehr. Man ziehe nämlich den ersten von $e$ nach $\infty$ und lasse bei ihm die Blätter 2 und 3 gegenseitig zusammenhängen, der zweite gehe von $e'$ nach $\infty$ und verbinde die Blätter 1 und 3 gegenseitig mit einander. Dann hängen in dem Punkte $z = \infty$ wirklich alle drei Blätter zusammen, in die man nach und nach gelangt, wenn man diesen Punkt umkreist. Man kann auch hier wieder wie in dem vorigen Beispiele $ee'$ als ersten Verzweigungsschnitt nehmen, und auf dieser Linie einen Scheidungspunkt $c$ anbringen, den man mit $\infty$ durch einen zweiten Verzweigungsschnitt verbindet.

## § 15.

Bedeutet $w$ eine mehrdeutige Function von $z$, $W$ aber eine rationale Function von $w$ und $z$ (oder auch von $w$ allein), so ist die $z$-Fläche für die Function $W$ ebenso beschaffen, wie für die Function $w$. Denn bezeichnet man mit $w_\varkappa$ und $w_\lambda$ irgend zwei demselben $z$ zugehörige Werthe von $w$, mit $W_\varkappa$ und $W_\lambda$ die entsprechenden Werthe von $W$, so muss $W_\varkappa$ in $W_\lambda$ übergehen, so oft $w_\varkappa$ in $w_\lambda$ übergeht, weil jedem Werthepaare von $z$ und $w$ nur ein einziger Werth von $W$ entspricht. Die Uebergänge der $W$-Werthe hängen daher in derselben Weise von den von $z$ durchlaufenen Um-

kreisungen ab, wie die $w$-Werthe. Daher hat die $z$-Fläche für $W$ dieselben Verzweigungspunkte und Verzweigungsschnitte wie für $w$, und in jedem Verzweigungspunkte hängen auch die nämlichen Blätter zusammen. Aus diesem Grunde nennt *Riemann* alle rationalen Functionen von $w$ und $z$ ein System gleichverzweigter Functionen.

---

# Vierter Abschnitt.

## Integrale mit complexen Variablen.

---

### § 16.

Man kann das bestimmte Integral von einer Function einer complexen Veränderlichen genau in derselben Weise definiren, wie dies bei reellen Variablen geschieht.

Es seien $z_0$ und $z$ irgend zwei complexe Werthe der Variablen $z$. Man denke sich die Punkte, welche diese beiden Werthe repräsentiren, durch eine beliebige ununterbrochene Linie verbunden und nehme auf derselben eine Reihe eingeschalteter Punkte an, welche den Werthen $z_1, z_2, \ldots z_n$ der Variablen entsprechen. Ist ferner $f(z)$ eine Function von $z$, und bildet man die Summe der Producte

$$f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots\ldots + f(z_n)(z - z_n),$$

so ist der Grenzwerth derselben, wenn die Anzahl der zwischen $z_0$ und $z$ längs der beliebigen Linie eingeschalteten Werthe in's Unendliche zunimmt, die Differenzen $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, etc. also in's Unendliche abnehmen, das bestimmte Integral zwischen den Grenzen $z_0$ und $z$, also

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \lim\,[f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots\ldots + f(z_n)(z - z_n)]. \quad (1)$$

Man sieht, dass diese Definition von der gewöhnlich bei reellen Variablen gegebenen in nichts Wesentlichem verschieden ist. Ein Unterschied besteht allerdings darin, dass, wie es die Natur einer complexen Veränderlichen erfordert, der Weg, den dieselbe zwischen der unteren und der oberen Grenze durchläuft, d. h. die Reihe der

dazwischen liegenden Werthe, nicht vorgeschrieben ist, sondern durch jede ununterbrochene Linie gebildet werden kann. Von dieser Linie, welche der **Integrationsweg** genannt wird, ist das Integral durchaus abhängig.

Aus der Definition folgen unmittelbar folgende zwei Sätze:

1) Bedeutet $z_k$ irgend einen der von der Variablen durchlaufenen Werthe, so ist

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_k} f(z)\, dz + \int_{z_k}^{z} f(z)\, dz,$$

2) Es ist

$$\int_{z}^{z_0} f(z)\, dz = -\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

d. h. durchläuft die Variable die Linie, welche die stetige Aufeinanderfolge ihrer Werthe darstellt, in umgekehrter Richtung, so erhält das Integral den entgegengesetzten Werth.

Man kann ferner zeigen, dass wie auch immer der Integrationsweg beschaffen sein mag, das Integral

$$w = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

stets eine Function der oberen Grenze $z$ ist, wenn die untere $z_0$ constant angenommen wird. Denn setzt man

$$z_0 = x_0 + iy_0 \qquad z = x + iy$$
$$\zeta = \xi + i\eta,$$

so hat man

$$w = \int_{x_0 + iy_0}^{x + iy} f(\xi + i\eta)\,(d\xi + i d\eta).$$

Dieses Integral zerfällt in zwei Theile, so dass in dem ersten $\xi$, in dem zweiten $\eta$ die Integrationsvariable ist. Liegt nun ein bestimmter Integrationsweg vor, so ist vermöge desselben $\eta$ eine Function von $\xi$, und $\xi$ eine Function von $\eta$; sei etwa

$$\eta = \varphi(\xi) \qquad \xi = \psi(\eta);$$

führt man diese ein, so wird nun, da $\xi$ alle Werthe von $x_0$ bis $x$, und gleichzeitig $\eta$ die den $\xi$ vermöge des Integrationsweges zugehörigen Werthe von $y_0$ bis $y$ durchläuft,

$$w = \int_{x_0}^{x} f(\xi + i\varphi(\xi))\, d\xi + i \int_{y_0}^{y} f(\psi(\eta) + i\eta)\, d\eta, ^{*)}$$

und diese Gleichung gilt, welches auch die den Integrationsweg bestimmenden Functionen $\varphi$ und $\psi$ sein mögen. Bringt man darin auch $f$ auf die Form einer complexen Grösse, so wird man auf lauter reelle Integrale geführt, und dann folgt unmittelbar, dass man auf die vorigen die bei reellen Integralen gültigen Differentiationsregeln anwenden kann. Man erhält also

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f(x + i\varphi(x)) = f(x + iy)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = if(\psi(y) + iy) = if(x + iy).$$

Demnach ist

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x},$$

also (nach § 5) $w$ eine Function von $z$. Aus dem zweiten der oben angeführten Sätze ergiebt sich dann, dass $w$ auch als Function der unteren Grenze betrachtet werden kann, wenn die obere als constant angesehen wird. Da ferner (§ 5) $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$ ist, so folgt auch

$$\frac{dw}{dz} = f(z).$$

Dagegen darf der bei reellen Integralen gültige Satz, dass, wenn $F(z)$ eine Function bedeutet, deren Derivirte $= f(z)$ ist,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = F(z) - F(z_0)$$

gesetzt werden kann, nicht ohne Weiteres auf complexe Integrale übertragen werden, denn, wie schon bemerkt, hängt der Werth eines solchen nicht bloss von der oberen und unteren Grenze, sondern auch von der ganzen Reihe der dazwischen liegenden Werthe, d. h. von dem Integrationswege ab.

---

*) Es folgt dies auch aus der Summe (1), durch welche das Integral definirt wird, wenn man in derselben die complexen Grössen in ihre Bestandtheile zerlegt.

## § 17.

Um nun den Einfluss zu untersuchen, den der Integrationsweg auf den Werth des Integrales hat, beginnen wir mit folgender Betrachtung. Es sei

$$z = x + iy$$

die Variable, also $x$ und $y$ die rechtwinkligen Coordinaten des darstellenden Punktes. Hat man nun ein auf irgend eine Weise bestimmt begrenztes Flächenstück, welches aus einem oder auch aus mehreren Theilen bestehen kann, und bedeuten $P$ und $Q$ zwei reelle innerhalb des Flächenstückes überall endliche und stetige Functionen von $x$ und $y$, so soll zunächst bewiesen werden, dass das auf das ganze Flächenstück ausgedehnte Flächenintegral

$$J = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

dem über die ganze Begrenzung des Flächenstücks erstreckten Linienintegral

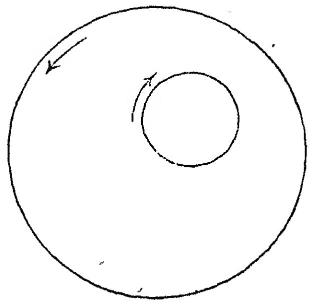
$$\int (Pdx + Qdy)$$

gleich ist.

Wir werden diesen Satz nicht bloss für den einfachsten Fall beweisen, dass das Flächenstück nur aus einem einzigen Blatte besteht und von einer einzigen einfach in sich zurücklaufenden Linie begrenzt wird, sondern wir wollen auch gleich die Fälle mit berücksichtigen, in welchen die Begrenzung aus mehreren abgesonderten geschlossenen Linien besteht, die entweder ganz ausser einander liegen können, oder von denen eine oder mehrere von einer anderen ganz umschlossen werden; endlich wollen wir auch den Fall nicht ausschliessen, dass das Flächenstück aus mehreren Blättern besteht, welche über die Verzweigungsschnitte hinüber in einander übergehen. Alsdann werden wir jedoch annehmen, dass das Flächenstück keine Verzweigungspunkte enthält, in denen die Functionen $P$ und $Q$ unendlich oder unstetig werden. Es muss nun aber, um alle diese Fälle zu umfassen, etwas Bestimmtes über den Sinn der Begrenzungsrichtung festgesetzt werden. Wenn wir, wie es üblich ist, annehmen, dass die positiven Richtungen der $x$- und $y$-Axe so liegen, dass ein im Nullpunkte stehender und nach der positiven Richtung der $x$-Axe hinblickender Beobachter die positive $y$-Axe zu seiner Linken sieht, so wollen wir die positive Be-

grenzungsrichtung so annehmen, dass jemand, der dieselbe in dieser Richtung durchläuft, das begrenzte Flächenstück stets an der linken Seite hat. Man kann dies auch so ausdrücken: In jedem Punkte der Begrenzung liegt die in das Innere des Flächenstücks gezogene Normale zur positiven Begrenzungsrichtung so, wie die positive $y$-Axe zur positiven $x$-Axe. Besteht z. B. die Begrenzung aus einer äusseren geschlossenen Linie und einem ganz innerhalb derselben liegenden Kreise, so dass die innerhalb dieses Kreises liegenden Punkte sich ausserhalb des begrenzten Flächenstücks befinden, so ist bei der äusseren Linie die positive Begrenzungsrichtung die der wachsenden Winkel, bei dem kleinen Kreise dagegen die entgegengesetzte, wie es die Pfeile in Fig. 21 andeuten. Bei dem Linienintegrale nun, von welchem wir beweisen wollen, dass es dem angegebenen Flächenintegrale gleich ist, muss die Integration über die ganze Begrenzung in der eben erläuterten positiven Richtung erstreckt werden.

Fig. 21.

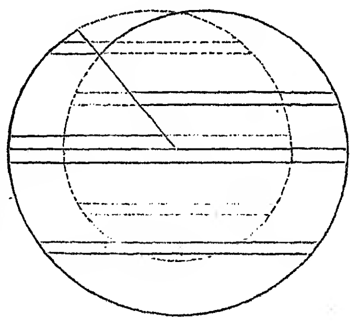


Wir schreiben das Integral $J$ in der Form

$$J = \iint \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy - \iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy,$$

und können dann in dem ersten Theile die Integration nach $x$, im zweiten Theile die nach $y$ ausführen. Zu diesem Zwecke zerlegen wir für das erste Integral das Flächenstück in Elementarstreifen, welche durch einander unendlich naheliegende, der $x$-Axe parallel laufende Gerade gebildet werden, und im Falle Verzweigungspunkte vorhanden sind, tragen wir Sorge, dass durch jeden derselben eine solche Gerade hindurch gehe. Dadurch zerfällt das ganze Flächenstück in unendlich schmale trapezförmige Streifen. In Fig. 22 sind z. B. bei einer aus 2 Blättern bestehenden Fläche, welche durch eine einen Verzweigungspunkt zweimal umgebende geschlossene Linie

Fig. 22.



begrenzt ist, mehrere solcher trapezförmigen Stücke dargestellt, wobei die im zweiten Blatte verlaufenden Linien punktirt sind. Hebt man nun irgend einen, einem beliebigen Werthe von $y$ angehörigen, dieser Elementarstreifen heraus, d. h. wenn die Fläche aus mehreren Blättern besteht, alle diejenigen in den verschiedenen Blättern unmittelbar über einander liegenden Elementarstreifen, die demselben Werthe von $y$ angehören, und bezeichnet die Werthe, welche die Function $Q$ an denjenigen Stellen besitzt, wo der Elementarstreifen die Begrenzung durchschneidet, von links nach rechts gerechnet (d. h. in der Richtung der positiven $x$-Axe) an den Eintrittsstellen mit

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \ldots.$$

und an den Austrittsstellen mit

$$Q',\ Q'',\ Q''', \ldots.$$

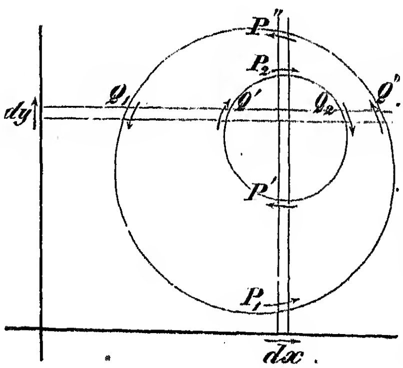
so ist (Fig. 23)

$$\int \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = -\, Q_1 + Q' - Q_2 + Q'' - \ldots\ldots, \text{*)}$$

also

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy = \int -\, Q_1\, dy + \int Q'\, dy + \int -\, Q_2\, dy + \ldots\ldots$$

Fig. 23.




In den Integralen rechter Hand durchläuft $y$ alle Werthe vom kleinsten bis zum grössten, $dy$ ist also immer positiv zu nehmen. Bezeichnet man aber die Projectionen der durch die Elementarstreifen aus der Begrenzung herausgeschnittenen Bogenelemente auf die $y$-Axe, in derselben Reihenfolge wie oben genommen, an den Eintrittsstellen durch

$$dy_1,\ dy_2,\ dy_3 \ldots\ldots,$$

und an den Austrittsstellen durch

$$dy',\ dy'',\ dy''' \ldots..$$

---

*) Man bemerke, dass diese Gleichung auch dann noch richtig bleibt, wenn $\frac{\partial Q}{\partial x}$ an irgend einer Stelle, über die sich die Integration erstreckt, unendlich oder unstetig wird, wenn nur $Q$ an dieser Stelle keine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Ist nämlich $f(x)$ eine Function der

und nimmt auf die positive Begrenzungsrichtung Rücksicht, so ist (Fig. 23)

$$dy = -dy_1 = -dy_2 = -dy_3 = \ldots.$$
$$= + dy' = + dy'' = + dy''' = \ldots.,$$

folglich

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy = \int Q_1\, dy_1 + \int Q'\, dy' + \int Q_2\, dy_2 + \ldots\ldots$$

In allen diesen Integralen verändert sich $y$ im Sinne der positiven Begrenzungsrichtung, daher vereinigen sich alle zu einem einzigen, und man erhält

$$\iint \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy = \int Q\, dy,$$

wenn das letztere Integral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckt wird.

---

reellen Variablen $x$, welche an einer Stelle $x = a$ stetig ist, während ihr Differentialquotient $f'(x)$ an dieser Stelle eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, so nehme man zu beiden Seiten von $a$ zwei unendlich nahe an $a$ liegende Werthe $x_h$ und $x_k$ an. Liegt dann in dem Integrale

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx$$

$a$ zwischen den Grenzen $x_0$ und $x_1$, und bleibt $f(x)$ zwischen denselben stetig, während $f'(x)$ nur an der Stelle $x = a$ unstetig ist, so kann man setzen

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx = \lim \left[\int_{x_0}^{x_h} f'(x)\, dx + \int_{x_k}^{x_1} f'(x)\, dx\right],$$

wo der Grenzübergang sich auf das Zusammenfallen von $x_h$ und $x_k$ mit $a$ bezieht. Da nun $f'(x)$ von $x_0$ bis $x_h$ und von $x_k$ bis $x_1$ stetig ist, so folgt

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx = \lim \left[f(x_h) - f(x_0) + f(x_1) - f(x_k)\right],$$

und da $f(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig ist, also beim Uebergang zur Grenze $f(x_h)$ und $f(x_k)$ einander gleich werden, oder

$$\lim \left[f(x_h) - f(x_k)\right] = 0$$

ist, so hat man trotz der Stetigkeitsunterbrechung von $f'(x)$ zwischen den Grenzen des Integrals doch

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\, dx = f(x_1) - f(x_0).$$

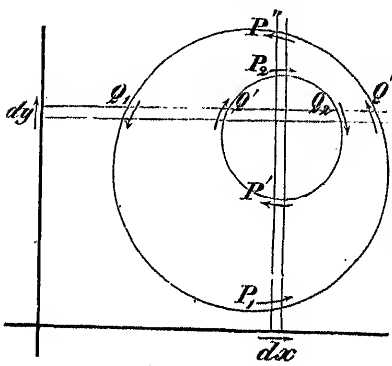
Dieser Fall ist hier mit zu berücksichtigen, da sich später zeigen wird, dass die Derivirten stetiger Functionen in den Verzweigungspunkten unendlich gross werden können (§ 39).

Ebenso kann man nun auch das zweite Integral

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy$$

behandeln. Hier zerlegt man das Flächenstück in Elementarstreifen durch gerade Linien, welche der $y$-Axe parallel laufen und lässt durch jeden Verzweigungspunkt eine solche Gerade hindurchgehn. Bezeichnet man dann die Werthe, welche die Function $P$ an den Stellen hat, wo ein Elementarstreifen die Begrenzung durchschneidet, diese Werthe der Reihe nach von unten nach oben (nämlich in der Richtung der positiven $y$-Axe) gerechnet, an den Eintrittsstellen mit

Fig. 23.




$$P_1,\ P_2,\ P_3\ \ldots\ldots$$

und an den Austrittsstellen mit

$$P',\ P'',\ P'''\ \ldots\ldots,$$

so ist wieder

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy = -\int P_1\, dx + \int P'\, dx - \int P_2\, dx + \ldots\ldots,$$

und darin ist $dx$ positiv. Bezeichnen aber

$$dx_1,\ dx_2,\ dx_3,\ \ldots\ldots \text{ und } dx',\ dx'',\ dx''',\ \ldots\ldots$$

die Projectionen der herausgeschnittenen Bogenelemente, so ist mit Berücksichtigung der positiven Begrenzungsrichtung

$$dx = +\, dx_1 = +\, dx_2 = +\, dx_3 = \ldots\ldots$$
$$= -\, dx' = -\, dx'' = -\, dx''' = \ldots\ldots$$

und daher

$$\iint \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy = -\int P_1\, dx_1 - \int P'\, dx' - \int P_2\, dx_2 - \ldots\ldots,$$

$$= -\int P dx,$$

worin wieder das Integral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung auszudehnen ist. Setzt man nun beide Integrale zusammen, so folgt, was zu beweisen war,

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \int (P dx + Q dy),$$

das Linienintegral auf die ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckt.

Dieser hiedurch für reelle Functionen $P$ und $Q$ bewiesene Satz kann sofort für den Fall erweitert werden, dass $P$ und $Q$ complexe Functionen der reellen Variablen $x$ und $y$ sind. Nämlich setzt man

$$P = P' + iP'' \qquad Q = Q' + iQ'',$$

worin $P'$, $P''$, $Q'$, $Q''$ reelle Functionen von $x$ und $y$ bedeuten, so ist

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint \left(\frac{\partial Q'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial y}\right) dxdy$$
$$+ i \iint \left(\frac{\partial Q''}{\partial x} - \frac{\partial P''}{\partial y}\right) dxdy,$$

und wenn man den Satz auf die reellen Theile der rechten Seite anwendet,

$$= \int (P'\,dx + Q'\,dy) + i \int (P''\,dx + Q''\,dy)$$
$$= \int (Pdx + Qdy).$$

Wir haben bisher angenommen, dass innerhalb des betrachteten Flächentheils keine Verzweigungspunkte oder andere Punkte liegen, in denen $P$ oder $Q$ unstetig ist. Um nun auch solche Flächentheile mit in die Betrachtung hineinziehen zu können, haben wir nur nöthig, solche Punkte mit beliebig kleinen (wirklich) geschlossenen Linien zu umgeben und dadurch auszuschliessen, wobei dann diese Linien mit zu der Begrenzung des Flächentheils gehören.

## § 18.

Aus dem vorigen Satze folgt sogleich der folgende: **Wenn $Pdx + Qdy$ ein vollständiges Differential ist, so ist das Integral $\int (Pdx + Qdy)$ ausgedehnt auf die ganze Begrenzung eines Flächenstücks, innerhalb dessen $P$ und $Q$ endlich und stetig sind, gleich Null.** I. Denn wenn $Pdx + Qdy$ ein vollständiges Differential ist, so ist

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

also verschwinden alle Elemente des Flächenintegrals, welches

dem Linienintegrale gleich ist, und folglich ist dieses wie jenes gleich Null.

Wenn nun

$$w = f(z)$$

eine Function einer complexen Variablen $z = x + iy$ ist, so ist [§ 5. (1)]

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial (iw)}{\partial x},$$

folglich

$$wdx + iwdy \quad \text{d. h.} \quad w(dx + idy) \quad \text{oder } wdz$$

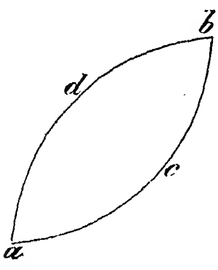
ein vollständiges Differential, und daher

$$\int f(z)\, dz = 0,$$

II. *wenn dieses Integral über die ganze Begrenzung eines Flächenstücks ausgedehnt wird, innerhalb dessen $f(z)$ endlich und stetig ist.*

Hieraus folgt weiter: Lässt man die Veränderliche $z$ zwischen zwei Punkten $a$ und $b$ zwei verschiedene Wege $acb$ und $adb$ (Fig. 24) durchlaufen, welche zusammen eine geschlossene Linie bilden, die für sich allein ein Flächenstück vollständig begrenzt, und ist innerhalb des so begrenzten Flächenstücks $f(z)$ endlich und stetig, so ist über die geschlossene Linie erstreckt

Fig. 24.




$$\int f(z)\, dz = 0.$$

Um ein auf einem bestimmten Wege genommenes Integral kurz zu bezeichnen, wählen wir den Buchstaben $J$ und fügen demselben den Integrationsweg in Klammern hinzu, sodass z. B. das auf dem Wege $acb$ genommene Integral $\int f(z)\, dz$ durch $J(acb)$ angedeutet wird. Dann kann man die letzte Gleichung schreiben

$$J(acbda) = 0.$$

Nun ist aber (§ 16.)

$$J(acbda) = J(acb) + J(bda)$$

und

$$J(bda) = -J(adb),$$

also folgt

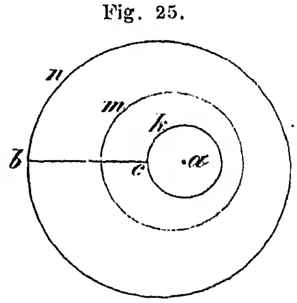
$$J(acb) = J(adb).$$

Das Integral $\int f(z)\, dz$ hat also auf zwei verschiedenen, dieselben Punkte verbindenden Wegen immer denselben Werth, wenn die beiden Wege zusammengenommen ein Flächenstück vollständig begrenzen, in welchem $f(z)$ endlich und stetig ist. III.

Hat man nun ein zusammenhängendes Flächenstück, in welchem $f(z)$ endlich und stetig bleibt, von der Beschaffenheit, dass jede darin gezogene (wirklich) geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheils bildet, so hat das Integral $\int f(z)\, dz$ auf allen Wegen zwischen denselben zwei Punkten denselben Werth. Lässt man die untere Grenze $z_0$ constant sein, so ist also innerhalb eines solchen Flächenstückes das Integral eine eindeutige Function der oberen Grenze, und bezeichnet $F(z)$ eine Function, deren Derivirte $= f(z)$, so ist innerhalb jenes Flächenstücks $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, dz = F(z) - F(z_0)$, da in diesem Falle der Werth des Integrals von dem Integrationswege unabhängig ist.

Es tritt hier die grosse Bedeutung hervor, welche solchen Flächen zukommt, in denen jede geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet. *Riemann* hat die Flächen von dieser Beschaffenheit mit dem Namen **einfach zusammenhängende Flächen** bezeichnet. Eine solche ist z. B. eine Kreisfläche. Ist in einer solchen $f(z)$ überall stetig, so ist, wie bemerkt, $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, dz$ in derselben eine eindeutige Function der oberen Grenze. Wenn dagegen $f(z)$ in einer Kreisfläche unendlich gross wird, z. B. nur in einem Punkte $a$, und umgiebt man diesen, um ein Flächenstück zu erhalten, in welchem $f(z)$ stetig bleibt, mit einem kleinen Kreise $k$, und schliesst den Punkt $a$ dadurch aus, so ist die so entstehende ringförmige Fläche (Fig. 25) nicht mehr einfach zusammenhängend; denn eine Linie $m$, welche den kleinen Kreis $k$ ganz umschliesst, bildet für sich allein noch nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, sondern erst $m$ und $k$ zusammen. Demnach hat zwar das auf $m$ und $k$ zugleich erstreckte Integral den Werth Null, wenn aber das auf $k$ allein ausgedehnte Integral nicht gleich Null ist, so kann auch das längs $m$ genom-

Fig. 25.



Grenze sein.*)

## § 19.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung, dass die Function $f(z)$ in dem zu betrachtenden Flächenstücke überall stetig sei, fallen und gehen zur Untersuchung von Integralen über, deren Integrationswege Flächentheile begrenzen, in denen die Function nicht mehr überall stetig ist.

Wenn $f(z)$ in irgend einem Punkte eines Flächenstückes unendlich oder unstetig ist, so soll ein solcher Punkt ein **Unstetigkeitspunkt** genannt werden. Er kann zugleich ein Verzweigungspunkt sein oder auch nicht. Giebt es nun in einem Flächenstücke Unstetigkeitspunkte, so ist man nicht mehr in allen Fällen berechtigt zu schliessen, dass das über die ganze Begrenzung des Flächenstücks ausgedehnte Integral den Werth Null habe, weil der Beweis dieses Satzes wesentlich auf der Voraussetzung beruht, dass $f(z)$ innerhalb des Flächenstückes nicht unstetig wird. Aber man kann zeigen, dass,

IV. *welchen Werth das Integral auch haben mag, es seinen Werth nicht ändert, wenn man das Flächenstück um beliebige Stücke vergrössert oder verkleinert, wenn nur $f(z)$ innerhalb der hinzugekommenen oder ausgeschiedenen Flächentheile endlich und stetig ist.*

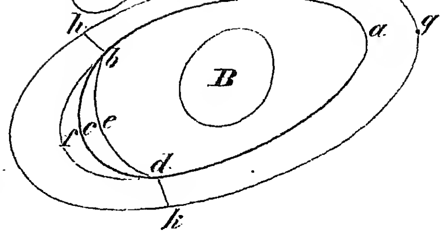
Denn wird erstlich ein hinzukommendes oder ausgeschiedenes Flächenstück selbst von einer Linie vollständig begrenzt, wie z. B. $A$ oder $B$ (Fig. 26, wo $abcda$ die ursprüngliche Begrenzung sei), so ist, wenn $f(z)$ innerhalb $A$ und $B$ stetig ist, das auf die Begrenzung von $A$ oder $B$ erstreckte Integral gleich Null; es kann daher die Begrenzung von $A$ oder $B$ beliebig der ursprünglichen Begrenzung hinzugefügt werden, ohne dass der Werth des Integrals sich ändert. Wird aber das hinzugekommene oder ausgeschiedene Flächenstück zum Theil von der ursprünglichen Begrenzung mit begrenzt, wie $bfdcb$ oder $bcdeb$, so ist

$$J(bfd) = J(bcd) = J(bed),$$

wenn $f(z)$ innerhalb jener Flächentheile stetig ist. Daher kann der Begrenzungstheil $bcd$ beliebig durch $bfd$ oder $bed$ ersetzt

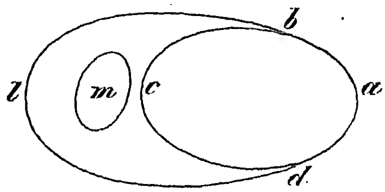
*) Siehe Abschnitt IX und X.

allein die Begrenzung eines Flächentheils bildet oder doch zu den Begrenzungsstücken eines solchen gehört, durch eine beliebige weitere oder engere geschlossene Linie ersetzen kann, wenn nur dadurch keine Flächentheile ein- oder austreten, in denen $f(z)$ unendlich oder unstetig wird, denn um z. B. $abcda$ in $ghkg$ zu erweitern, braucht man nur zuerst $bcd$ durch $bhkd$ und dann $dab$ durch $dkghb$ zu ersetzen.




Endlich kann man auch ein Flächenstück $abcda$ (Fig. 27) durch ein ringförmiges Stück, das von der Linie $bldcb$ und der Linie $m$ begrenzt wird, vergrössern, wenn nur die Function $f(z)$ in dem Ringe stetig bleibt, mag sie auch innerhalb $m$ unstetig werden. Denn unter dieser Voraussetzung ist

Fig. 27.




$$J(bldcb) + J(m) = 0.$$

Setzt man also

$$J(dabcd) = S,$$

so ist auch

$$S = J(dabcd) + J(bldcb) + J(m)$$
$$= J(dab) + J(bcd) + J(bld) + J(dcb) + J(m)$$

und da

$$J(bcd) + J(dcb) = 0$$

ist,

$$S = J(dab) + J(bld) + J(m)$$

oder

$$S = J(dabld) + J(m).$$

In ähnlicher Weise lässt sich die Richtigkeit des Satzes in allen Fällen darthun. Ganz allgemein aber, auch für Flächenstücke, die aus mehreren Blättern bestehen, kann er so bewiesen werden. Wird eine beliebige Fläche $T$ so in zwei Theile $A$ und $B$ getheilt, dass $f(z)$ in $A$ stetig ist, und bezeichnet man das über die Be-

grenzung eines Theiles, z. B. $A$ erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ durch $J(A)$, so ist

$$J(A) = 0.$$

Haben nun die Theile $A$ und $B$ keine gemeinschaftlichen Begrenzungsstücke, so bilden die Begrenzungen von $A$ und $B$ zusammen die Begrenzung von $T$, und daher ist

$$J(T) = J(A) + J(B)$$

und folglich auch

$$J(T) = J(B).$$

Gehören dagegen gewisse Linien $C$ sowohl zur Begrenzung von $A$, als auch zu der von $B$, so liegen die Flächentheile $A$ und $B$ auf verschiedenen Seiten dieser Linien $C$. Durchläuft man also die Begrenzungen von $A$ und $B$ hinter einander in der positiven Begrenzungsrichtung, d. h. so, dass der begrenzte Flächentheil jedesmal zur linken Hand liegt, so werden die Linien $C$ zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; die längs $C$ genommenen Integrale heben sich daher auf; die übrigen Begrenzungstheile von $A$ und $B$ aber bilden die ganze Begrenzung von $T$, und daher hat man wieder

$$J(T) = J(A) + J(B)$$

und folglich

$$J(T) = J(B).$$

Da nun hienach der Theil $A$ aus der Fläche $T$ ausgeschieden werden kann, so kann auch umgekehrt eine Fläche $B$ durch Hinzufügung einer Fläche $A$, in welcher die Function stetig bleibt, erweitert werden, ohne dass das Begrenzungsintegral sich ändert.

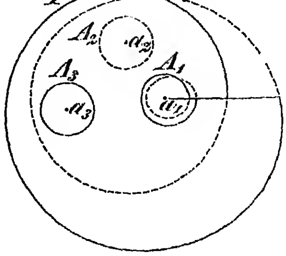
Hierauf stützt sich nun ein anderer wichtiger Satz. Bildet eine geschlossene Linie $(I)$ für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, und wird die Function $f(z)$ innerhalb desselben in den Punkten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ unstetig, so umgebe man jeden einzelnen dieser Punkte mit einer beliebig kleinen geschlossenen Linie, z. B. mit einem kleinen Kreise, der aber, wenn einer dieser Unstetigkeitspunkte zugleich ein Verzweigungspunkt ist, so viele Male durchlaufen werden muss, als Blätter in letzterem zusammenhängen. Alsdann bilden alle diese Kreise, die mit $(A_1)$, $(A_2)$, $(A_3)$, .... bezeichnet werden mögen, mit der äusseren Linie $(I)$ zusammen die Begrenzung eines Flächenstückes, in welchem $f(z)$ stetig ist. (Fig. 28, wo die punktirten Linien im zweiten Blatte verlaufen.) Folglich ist das auf diese ganze Begrenzung in positiver Richtung erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ gleich Null. Wird nun aber die äussere Linie $(I)$ in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen, so müssen die kleinen Kreise $(A_1)$, $(A_2)$,

$A_3, \cdots$, so ist

$$I - A_1 - A_2 - A_3 - \cdots = 0$$

und folglich

$$I = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$$




Befindet sich nun die Linie $(I)$ in einem Flächenstücke $T$, welches keine anderen Unstetigkeitspunkte enthält, als die von ihr umschlossenen $a_1, a_2, a_3, \cdots$, so behält das Integral $I$ nach dem vorigen Satze seinen Werth, wenn es auf die Begrenzung von $T$ ausgedehnt wird, und daher erhalten wir den Satz: Das Integral $\int f(z)\, dz$, ausgedehnt auf die ganze Begrenzung eines Flächenstücks $T$, ist gleich der Summe der Integrale längs kleiner geschlossener Linien, welche die sämmtlichen innerhalb $T$ befindlichen Unstetigkeitspunkte einzeln umgeben, alle Integrale in derselben Richtung genommen. V.

## § 20.

Durch die vorige Betrachtung sind wir nun auf die Untersuchung solcher geschlossener Integrationswege geführt worden, welche nur einen einzigen Unstetigkeitspunkt umgeben. Dabei müssen wir aber unterscheiden, ob der Unstetigkeitspunkt zugleich ein Verzweigungspunkt ist, oder nicht. Betrachten wir zuerst einen Punkt $a$, welcher nicht Verzweigungspunkt ist, und in welchem $f(z)$ unendlich gross wird. Nimmt man das Integral

$$A = \int f(z)\, dz$$

längs einer diesen Unstetigkeitspunkt umgebenden Linie, welche weder einen anderen Unstetigkeitspunkt, noch auch einen Verzweigungspunkt einschliesst, so kann diese durch einen kleinen Kreis um den Punkt $a$ mit dem Radius $r$ ersetzt werden, welchen man auch in's Unendliche abnehmen lassen kann, ohne dass der Werth des Integrals sich ändert. Schreibt man dann

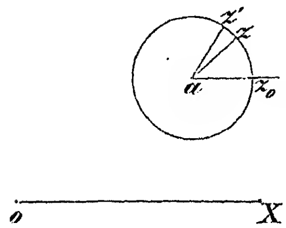
$$A = \int (z - a) f(z) \frac{dz}{z - a}$$

und setzt

$$z - a = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

so bleibt, wenn $z$ den kleinen Kreis durchläuft, $r$ constant, und $\varphi$ wächst von 0 bis $2\pi$. Dabei wird angenommen, dass der Punkt $z$ seine Bewegung aus dem Punkte $z_0$ beginne, in welchem eine aus $a$ mit der positiven Hauptaxe parallel gezogene Gerade den Kreis durchschneidet (Fig. 29). Dies ist gestattet, da der Anfangspunkt der Bewegung willkürlich gewählt werden kann.

Fig. 29.




Um nun $\frac{dz}{z - a}$ durch $r$ und $\varphi$ auszudrücken, bemerke man mit *Riemann*, dass $dz$ einen von einem beliebigen Punkte $z$ der Peripherie des Kreises ausgehenden unendlich kleinen Kreisbogen bedeutet, dessen Centriwinkel $= d\varphi$ ist. Bezeichnet man den Endpunkt dieses unendlich kleinen Kreisbogens mit $z'$, so ist

$$dz = z' - z \quad , \quad \frac{dz}{z - a} = \frac{z' - z}{z - a}.$$

Nun ist aber § 2. S. 18 gezeigt worden, dass

$$\frac{z' - z}{z - a} = \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}} (- \cos \alpha + i \sin \alpha)$$

ist, wo $\alpha$ den Winkel $azz'$ bedeutet. Dieser ist in unserem Falle ein Rechter, also

$$\frac{dz}{z - a} = i \frac{\overline{zz'}}{\overline{az}}.$$

Die Linie $\overline{zz'}$ ist ein Kreisbogen mit dem Centriwinkel $d\varphi$, also $= r d\varphi$, $\overline{az}$ der Radius, also $= r$, folglich erhält man

$$\frac{dz}{z - a} = i \frac{r d\varphi}{r} = i d\varphi.*)$$

---

*) Man erhält auch direct aus

$$z - a = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

durch Differentiation, bei welcher $r$ als Radius des Kreises constant bleibt,

$$\begin{aligned} dz &= r (- \sin \varphi + i \cos \varphi)\, d\varphi \\ &= ir (\cos \varphi + i \sin \varphi)\, d\varphi, \end{aligned}$$

also

$$\frac{dz}{z - a} = i d\varphi.$$

Setzt man dies ein, so folgt

$$A = \int_0^{2\pi} (z - a) f(z)\, i\, d\varphi.$$

Lässt man jetzt den Radius $r$ des Kreises in's Unendliche abnehmen, so nähern sich die Punkte $z$ der Peripherie des Kreises dem Punkte $a$, $z - a$ also der Null, während $f(z)$ unendlich gross wird. Wenn nun der Fall eintritt, dass $f(z)$ für $z = a$ so unendlich wird, dass das Product $(z - a) f(z)$ sich einem bestimmten endlichen Grenzwerth $p$ nähert, also

$$[\lim (z - a) f(z)]_{z = a} = p$$

ist, wobei aber ausdrücklich vorausgesetzt wird, dass dieser Grenzwerth immer derselbe sei, von welcher Seite her der Punkt $z$ dem Punkte $a$ auch immer sich nähern möge, so kann man für alle in der Nähe des Punktes $a$ befindlichen Punkte $z$ annehmen, dass

$$(z - a) f(z) = p + \varepsilon$$

ist, worin $\varepsilon$ eine Function von $r$ und $\varphi$ bedeutet, welche für jeden Werth von $\varphi$ mit $r$ zugleich unendlich klein wird. Man erhält dadurch

$$A = p \int_0^{2\pi} i\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \varepsilon\, i\, d\varphi.$$

Lässt man nun $r$ und also auch $\varepsilon$ bis zum Verschwinden abnehmen, so verschwindet auch das zweite Integral, und es folgt

$$A = 2\pi i p.$$

Dadurch ist der Werth des Integrals durch den Grenzwerth von $(z - a) f(z)$ ausgedrückt, wenn derselbe ein endlicher **und bestimmter** ist. Dieser Werth von $A$ ändert sich nach IV nicht, wenn die Integration auf die vollständige Begrenzung eines Flächentheils ausgedehnt wird, innerhalb dessen keine Unstetigkeitspunkte ausser $a$ sich befinden.

Als Beispiel diene

$$\int \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{(z - i)(z + i)},$$

welches für $z = i$ unendlich wird, ohne dass dieser Punkt ein Ver-

zweigungspunkt ist (die Function $\frac{1}{1+z^2}$ hat überhaupt keine Verzweigungspunkte). Ferner ist

$$p = \left[\lim \frac{z-i}{1+z^2}\right]_{z=i} = \left[\lim \frac{1}{z+i}\right]_{z=i} = \frac{1}{2i},$$

also

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \pi,$$

das Integral auf eine den Punkt $i$ umgebende geschlossene Linie in der Richtung der wachsenden Winkel ausgedehnt.

Liegen nun in einem Flächenstücke $T$ die Unstetigkeitspunkte $a_1$, $a_2$, $a_3$, etc., die aber nicht zugleich Verzweigungspunkte sein dürfen, und wird $f(z)$ in diesen Punkten so unendlich, dass die Producte $(z - a_1) f(z)$, $(z - a_2) f(z)$, etc. sich bestimmten endlichen Grenzwerthen $p_1$, $p_2$, etc. nähern, sodass

$$[\lim (z - a_1) f(z)]_{z=a_1} = p_1$$
$$[\lim (z - a_2) f(z)]_{z=a_2} = p_2$$
etc.

ist, so erhält man für das auf die ganze Begrenzung von $T$ erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ den Werth (V. § 19.)

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i\,(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots\cdots).$$

In dem vorigen Beispiele wird

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

auch für $z = -i$ unendlich gross, und für diesen Punkt erhält man

$$p_2 = \left[\lim \frac{z+i}{1+z^2}\right]_{z=-i} = \left[\lim \frac{1}{z-i}\right]_{z=-i} = -\frac{1}{2i},$$

also auf eine den Punkt $-i$ umgebende Linie erstreckt

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = -\pi.$$

Für eine Linie, welche beide Punkte $+i$ und $-i$ in der Richtung der wachsenden Winkel umgiebt, wird daher dieses Integral $= \pi - \pi = 0$.

Vermittelst solcher geschlossener Linien, die nur einen einzigen Unstetigkeitspunkt umgeben, kann man nun innerhalb eines Flächentheils, der keine Verzweigungspunkte der Function $f(z)$ und auch

keine Lücken enthält, die für verschiedene Integrationswege geltenden Werthe der Integrale auf einander beziehen. Wenn zwei Wege $bec$ und $bdc$ (Fig. 10) nur einen Unstetigkeitspunkt $a$ und keinen Verzweigungspunkt einschliessen,*) so kann der eine, z. B. $bdc$ dadurch ersetzt werden, dass man dem anderen $bec$ eine den Unstetigkeitspunkt umgebende geschlossene Linie $bghb$ vorangehen lässt. Denn nach IV. § 19 ist

$$J(bghb) = J(bdceb) = J(bdc) - J(bec)$$

also

$$J(bdc) = J(bghb) + J(bec)$$

oder auch

$$J(bec) = -J(bghb) + J(bdc) = J(bhgb) + J(bdc).$$

Fig. 10.

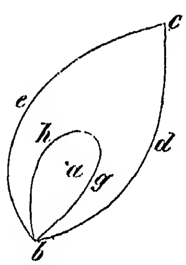
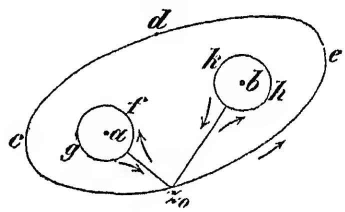



Fig. 11.




Ebenso verhält es sich, wenn zwei Wege mehrere Unstetigkeitspunkte, aber keine Verzweigungspunkte einschliessen. Umgeben z. B. die Wege $z_0ed$ und $z_0cd$ (Fig. 11) zwei Unstetigkeitspunkte $a$ und $b$, so ziehe man aus $z_0$ um jeden derselben eine geschlossene Linie $z_0fgz_0$ und $z_0hkz_0$. Dann ist

$$J(z_0fgz_0) + J(z_0hkz_0) = J(z_0edcz_0) = J(z_0ed) - J(z_0cd)$$

also

$$J(z_0ed) = J(z_0fgz_0) + J(z_0hkz_0) + J(z_0cd).$$

Man kann daher den einen Weg dadurch ersetzen, dass man dem anderen geschlossene Linien um je einen der Unstetigkeitspunkte vorhergehen lässt.

Wie sich das Integral $A$ um einen Unstetigkeitspunkt $a$ verhält, wenn darin $(z-a)f(z)$ nicht mehr einen bestimmten endlichen Grenzwerth hat, kann erst später (Abschnitt VIII) erledigt werden.

---

*) Die Voraussetzung, dass die beiden Wege keinen Verzweigungspunkt einschliessen, ist im Allgemeinen nur darum nothwendig, damit sie zusammengenommen eine vollständige Begrenzung bilden, was nicht immer der Fall zu sein braucht, wenn Verzweigungspunkte dazwischen liegen.

## § 21.

Wir gehen nun zu dem Falle über, dass der Unstetigkeitspunkt zugleich ein Verzweigungspunkt ist, in welchem Falle er mit $b$, und der Integralwerth für eine um ihn gelegte Linie mit $B$ bezeichnet werden soll; wir nehmen an, dass in diesem Punkte $m$ Blätter der Fläche zusammenhängen. Will man hier eine geschlossene Linie haben, die den Punkt $b$ umgiebt, so muss dieselbe $m$ Umläufe um $b$ machen, also z. B. die Peripherie eines Kreises $m$ Mal durchlaufen werden. *Riemann* führt für diesen Fall statt $z$ eine neue Variable $\zeta$ ein, indem er setzt

$$\zeta^m = z - b,$$

welche also für $z = b$ den Werth 0 erhält, und untersucht, wie sich die Function $f(z)$, als Function von $\zeta$ betrachtet, an der Stelle $\zeta = 0$ verhält. Zu diesem Ende sehen wir zuerst zu, welche Linie $\zeta$ beschreibt, während $z$ einen geschlossenen Kreis, d. h. also $m$ Umläufe um einen solchen zurücklegt. Setzt man wieder

$$z - b = r\ (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

also

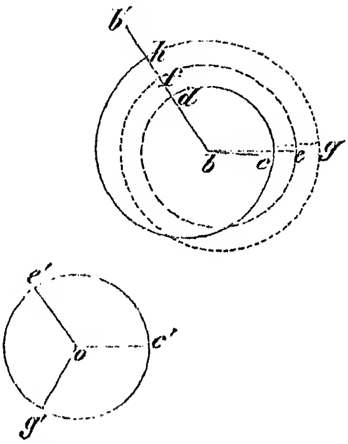
$$\zeta = r^{\frac{1}{m}} (\cos \frac{1}{m} \varphi + i \sin \frac{1}{m} \varphi)$$

so bleibt $r$, also auch $r^{\frac{1}{m}}$ constant, und daher beschreibt $\zeta$ ebenfalls einen Kreis und zwar um den Nullpunkt. Hat aber $z$ einen Umlauf vollendet, sodass $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ gewachsen ist, so ist $\frac{1}{m}\varphi$ von 0 bis $\frac{2\pi}{m}$ gewachsen, also hat $\zeta$ den $m$ten Theil der Peripherie zurückgelegt. Bei dem zweiten Umlaufe des $z$ beschreibt $\zeta$ auf's Neue einen $m$ten Theil der Peripherie, und ebenso bei jedem neuen Umlaufe des $z$. Hat $z$ daher $m$ Umläufe gemacht und ist auf seinen Ausgangspunkt zurückgekommen, so hat $\zeta$ die ganze Peripherie des Kreises gerade einmal durchlaufen. Den $m$ Flächentheilen, welche von dem Radius $r$ während jedes Umlaufes überstrichen werden, entsprechen also $m$ Kreissectoren, jeder mit dem Centriwinkel $\frac{2\pi}{m}$. Diese fügen sich an einander und bilden zusammen eine einfache Kreisfläche. In Fig. 30 ist angenommen, dass in dem Punkte $b$ drei Blätter zusammenhängen, welche über den Verzweigungsschnitt $bb'$ hinüber in einander übergehen. Die in den drei Blättern verlaufenden Kreislinien sind der Deutlichkeit wegen neben einander gezeichnet, und die im 1sten, 2ten und 3ten Blatte verlaufenden Linien resp. durch eine ausgezogene Linie, durch Striche und durch Punkte bezeichnet worden. Dann entspricht

der Fläche $cde$ der Kreissector $c'oe'$
" " $efg$ " " $e'og'$
" " $ghc$ " " $g'oc'$,

dem ganzen von der geschlossenen Linie $cdefghc$ begrenzten Flächentheile entspricht daher die einfache Kreisfläche $c'e'g'c'$. Es ergiebt sich also, dass, während $z$, alle $m$ Blätter durchlaufend, erst nach $m$ Umläufen zu seinem Ausgangspunkte zurückkommt, dies bei $\zeta$ schon nach dem ersten Umlaufe eintritt. Die Variable $\zeta$ tritt daher aus ihrem ersten Blatte nicht heraus, und folglich hat die Function $f(z)$ als Function von $\zeta$ betrachtet an der Stelle $\zeta = 0$ **keinen** Verzweigungspunkt. Wenn wir demnach in dem Integrale $\int f(z)\,dz$ ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, welche den Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkt $b$ umgiebt, $\zeta$ als Variable einführen, so können wir die Betrachtung des vorigen § anwenden, weil $\zeta = 0$ kein Verzweigungspunkt, sondern ein blosser Unstetigkeitspunkt ist. Es gehe nun durch die Substitution von $\zeta = (z - b)^{\frac{1}{m}}$ die Function $f(z)$ in $\varphi(\zeta)$ über; dann wird, weil $dz = m\zeta^{m-1}d\zeta$ ist,

Fig. 30.




$$B = m\int \zeta^{m-1}\varphi(\zeta)\,d\zeta = m\int \zeta^{m}\varphi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{m}\varphi = \psi$, also $\zeta = r^{\frac{1}{m}}(\cos\psi + i\sin\psi)$, so wächst bei dem ganzen Umlaufe $\psi$ von 0 bis $2\pi$, und da wie oben $\frac{d\zeta}{\zeta} = i\,d\psi$ ist, so erhält man

$$B = m\int_0^{2\pi} \zeta^{m}\varphi(\zeta)\,i\,d\psi.$$

Nun ist der Annahme nach $\varphi(\zeta)$ für $\zeta = 0$ unendlich gross. Geschieht dies Unendlichwerden aber so, dass eins der Producte

$$\zeta\varphi(\zeta),\ \zeta^2\varphi(\zeta),\ \ldots,\ \zeta^{m-1}\varphi(\zeta)$$

sich einem endlichen Grenzwerthe nähert, so ist

$$[\lim \zeta^m \varphi(\zeta)]_{\zeta=0} = 0.$$

Lässt man also den Radius $r$ der um den Punkt $b$ beschriebenen Kreislinien in's Unendliche abnehmen, so wird dann

$$B = 0.$$

Kehren wir nun wieder zur Variablen $z$ zurück, so erhalten wir den Satz: Wenn das Integral $\int f(z)\, dz$ auf eine geschlossene Linie ausgedehnt wird, die einen Unstetigkeitspunkt umgiebt, der zugleich ein Verzweigungspunkt ist, in welchem $m$ Blätter der Fläche zusammenhängen, so hat dasselbe immer den Werth Null, wenn eins der Producte

$$(z-b)^{\frac{1}{m}} f(z),\ (z-b)^{\frac{2}{m}} f(z), \ldots .\ (z-b)^{\frac{m-1}{m}} f(z)$$

sich einem endlichen Grenzwerthe nähert.

Als Beispiel diene

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

welches für $z = 1$ unendlich wird. Dieser Punkt ist zugleich ein Verzweigungspunkt, in welchem zwei Blätter zusammenhängen. Man setze daher

$$\zeta^2 = z - 1$$

und erhält

$$f(z) = \varphi(\zeta) = \frac{1}{i\zeta\sqrt{(2+\zeta^2)\,(1-k^2(1+\zeta^2)^2)}},$$

sodass in der That $\zeta = 0$ kein Verzweigungspunkt für $\varphi(\zeta)$ ist. Nun erhält man

$$\lim\left[(z-1)^{\frac{1}{2}} f(z)\right]_{z=1} = \left[\lim \frac{1}{i\sqrt{(z+1)(1-k^2z^2)}}\right]_{z=1} = \frac{1}{i\sqrt{2(1-k^2)}},$$

folglich ist

$$[\lim (z-1) f(z)]_{z=1} = 0$$

und daher auch

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 0,$$

wenn das Integral längs einer den Punkt $z = 1$ umgebenden geschlossenen Linie genommen wird. Denselben Werth hat das Integral auch, wenn die geschlossene Linie einen der drei anderen Verzweigungspunkte $-1$, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ umgiebt.

Die Untersuchung, welchen Werth das Integral $B$ hat, wenn die Voraussetzungen des vorigen Satzes nicht erfüllt sind, kann erst später (Abschnitt VIII) vorgenommen werden.

---

# Fünfter Abschnitt.

## Der Logarithmus und die Exponentialfunction.

### § 22.

Da wir in der Folge von einigen Eigenschaften des Logarithmus Gebrauch zu machen genöthigt sein werden, so müssen wir für einen Augenblick die allgemeinen Betrachtungen unterbrechen und uns zuerst mit dieser speciellen Function beschäftigen. Dabei erscheint es nicht unzweckmässig, diese Untersuchung etwas vollständiger zu führen, als es für die beabsichtigte Anwendung nothwendig gewesen wäre, und auch gleich daran die Betrachtung der aus dem Logarithmus folgenden Exponentialfunction anzuschliessen. Da wir es hier alsdann mit einem speciellen Falle der in den Abschnitten IX und X anzustellenden allgemeinen Untersuchungen zu thun haben, so kann dies Beispiel auch dazu dienen, für jene späteren Betrachtungen die Vorstellungen zu fixiren.

Wir bezeichnen nach *Riemann* mit dem Namen Logarithmus jede Function $f(z)$, welche die Eigenschaft hat, dass

$$f(z \cdot u) = f(z) + f(u) \tag{5}$$

ist. Dadurch ist die Function bis auf eine Constante vollständig bestimmt, denn wir werden daraus alle ihre Eigenschaften ableiten können. Setzt man zuerst $u = 1$ und lässt $z$ beliebig, so folgt

$$f(z) = f(z) + f(1)$$

also

$$f(1) = \text{Log}\, 1 = 0.$$

Setzt man aber $u = 0$, so erhält man

$$f(0) = f(z) + f(0);$$

giebt man nun dem $z$ einen Werth, für welchen $f(z)$ nicht gleich Null ist, so folgt

$$f(0) = \text{Log } 0 = \infty;$$

aus demselben Grunde wird auch Log $\infty$ unendlich gross. Man kann ferner den Logarithmus durch ein Integral ausdrücken. Denn differentirt man die Gleichung (5) partiell nach $u$, so folgt

$$z f'(zu) = f'(u),$$

und wenn man dann $u = 1$ setzt,

$$z f'(z) = f'(1).$$

Die Constante $f'(1)$ bezeichnen wir mit $m$. Von dieser Constanten hängt der Werth des Logarithmus einer Zahl ab. Die Logarithmen aller Zahlen, die man erhält, wenn man der Constanten $m$ einen bestimmten Werth beilegt, bilden zusammen ein Logarithmensystem, und man nennt die Constante $m$ den Modulus dieses Logarithmensystems.

Aus der Gleichung

$$z f'(z) = m$$

folgt nun

(6) $$df(z) = d \text{ Log } z = m \frac{dz}{z},$$

also

$$f(z) = m \int \frac{dz}{z} + C.$$

Da $f(1) = 0$ ist, so erhält die Constante $C$ den Werth Null, wenn man dem Integral die untere Grenze 1 zuertheilt und $z$ reelle Werthe durchlaufen lässt. Wir setzen daher auch im Allgemeinen

$$\text{Log } z = m \int_1^z \frac{dz}{z}$$

und haben damit den Logarithmus durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt. Für die Analysis sind die Logarithmen desjenigen Systems die einfachsten, in welchem die Constante $m$ den Werth 1 hat. Diese nennt man natürliche Logarithmen, und wir werden im Folgenden solche unter dem Zeichen log $z$ verstehen. Dann ist also

$$\log z = \int_1^z \frac{dz}{z},$$

und daher

$$\mathrm{Log}\, z = m \,.\, \log z.$$

Setzt man

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so erhält man

$$dz = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,dr + r\,(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi$$
$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,(dr + i\,r\,d\varphi),$$

also

$$\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + i\,d\varphi.$$

Geht nun $z$ auf irgend einem Wege von 1 nach einem beliebigen Punkte $z$, so durchläuft $r$ die reellen Werthe von 1 bis $r$, und $\varphi$ von 0 bis $\varphi$, daher ist

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_1^r \frac{dr}{r} + i\varphi$$

oder

$$\log z = \log r + i\varphi. \qquad (7)$$

Hierdurch ist $\log z$ auf die Form einer complexen Grösse gebracht, denn da $r$ in dem Integral $\int_1^r \frac{dr}{r}$ nur reelle und positive Werthe annimmt, so ist auch $\log r$ reell; und man sieht zugleich, dass $\log r$ positiv oder negativ ist, je nachdem $r$ grösser oder kleiner als 1 ist; denn da $r$ immer positiv ist, so bewegt sich der darstellende Punkt auf der positiven Hauptaxe im ersten Falle nach der positiven, im letzteren Falle nach der negativen Seite, und daher sind im ersteren Falle alle Elemente $\frac{dr}{r}$ positiv, im letzteren alle negativ.

Wir ersehen ferner, dass der Logarithmus von dem Integrationswege abhängig ist; denn bezeichnet $\varphi$ den Werth, den dieser Winkel erreicht, wenn $z$ auf einer den Nullpunkt nicht umwindenden Linie, bei welcher die Winkel wachsen, von 1 nach $z$ geht, so ist $\varphi - 2\pi$ der Werth, den dieser Winkel annimmt, wenn die Linie auf der anderen Seite des Nullpunkts, also in der Richtung der abnehmenden Winkel von 1 nach $z$ führt; und wird der Nullpunkt von einer Linie $n$ Mal in der Richtung der wachsenden Winkel umwunden, so erreicht $\varphi$ in $z$ den Werth $\varphi + 2n\pi$. Demnach ist vollständig

$$\log z = \log r + i\varphi \pm 2n\pi i.$$

Hierdurch bestätigen sich unsere allgemeinen Betrachtungen. Die

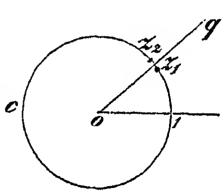
Function $\frac{1}{z}$ hat keinen Verzweigungspunkt, dagegen den Unstetigkeitspunkt $z = 0$. Lässt man $z$ eine geschlossene Linie um den Nullpunkt beschreiben, so ist der Werth des auf diese Linie in der Richtung der wachsenden Winkel erstreckten Integrals $= 2\pi i$, weil

$$p = \left[\lim z \frac{1}{z}\right]_{z=0} = 1$$

ist (§ 20). Durch die am Schlusse des § 20 angestellten Betrachtungen erhält man dasselbe Resultat wie oben.

Hieraus folgt nun, dass die Function $\log z$ in keinem Punkte der Ebene einen völlig bestimmten Werth hat und in irgend zwei unendlich nahen Punkten durch passende Anordnung des Integrationsweges Werthe erhalten kann, die um ein Vielfaches von $2\pi i$ von einander verschieden sind. Um diese Unbestimmtheit so viel als möglich zu beschränken, denke man sich aus dem Nullpunkte eine in's Unendliche verlaufende Linie $oq$ (Fig. 31) gezogen, welche sich selbst nicht schneidet. Eine solche Linie wird nach *Riemann* ein Querschnitt genannt. Dann muss von je zwei von 1 nach $z$ führenden Wegen, welche den Nullpunkt einschliessen, der eine nothwendig den Querschnitt durchschneiden, und folglich nimmt $\log z$ auf allen den Querschnitt nicht überschreitenden Wegen in jedem Punkte $z$ einen einzigen ganz bestimmten Werth an, der sich auch mit $z$ überall stetig ändert. Nur auf den Punkten des Querschnitts selber bleibt die Unbestimmtheit bestehen. Bezeichnet man nun die unendliche Ebene, in welcher $z$ sich bewegt, mit $T$, und denkt dieselbe längs des Querschnittes $oq$ wirklich durchgeschnitten, so entsteht eine Fläche, die mit $T'$ bezeichnet werden möge. Innerhalb dieser kann nun der Querschnitt nicht überschritten werden, und daher ist $\log z$ innerhalb $T'$ eine eindeutige überall stetige Function von $z$. In der Fläche $T$ dagegen wird $\log z$ beim Ueberschreiten des Querschnittes unstetig. Denn sind $z_1$ und $z_2$ zwei zu beiden Seiten des Querschnittes unendlich nahe an einander liegende Punkte ($z_1$ etwa rechts und $z_2$ links von der Richtung $oq$), und lässt man $z$ von 1 aus über $z_1$ und $z_2$ eine geschlossene Linie um den Nullpunkt beschreiben, so ist

Fig. 31.




$$J(1\, z_1\, z_2\, c\, 1) = J(1\, z_1) - J(1\, c\, z_2) = 2\pi i.$$

Bezeichnen also $w_1$ und $w_2$ die Werthe, welche $\log z$, zunächst in $T'$ betrachtet, in $z_1$ und $z_2$ annimmt, sodass

$$w_1 = J\,(1\,z_1) \qquad w_2 = J\,(1\,c\,z_2)$$

ist, so hat man

$$w_1 - w_2 = 2\pi i.$$

Denkt man sich also nun die Fläche $T$ wieder hergestellt, so springt log $z$, wenn $z$ von $z_1$ nach $z_2$ geht, plötzlich von $w_1$ in $w_1 - 2\pi i$, oder wenn $z$ von $z_2$ nach $z_1$ geht, plötzlich von $w_2$ nach $w_2 + 2\pi i$ über. Dieses gilt, an welcher Stelle die geschlossene Linie den Querschnitt auch überschreiten mag. Längs des ganzen Querschnittes ist daher log $z$ unstetig, und zwar sind für alle Punkte auf der rechten Seite desselben die Werthe von log $z$ um $2\pi i$ grösser als auf der linken. Dieser constante Werth, um welchen alle Functionswerthe auf der einen Seite grösser sind, als die benachbarten auf der anderen Seite, heisst nach *Riemann* der Periodicitätsmodul der Function oder des Integrals, insofern erstere durch ein Integral dargestellt ist.

## § 23.

Aus dem Logarithmus leitet sich die Exponentialfunction in folgender Art ab. Unter dem Zeichen

$$a^w$$

soll eine Function von $w$ verstanden werden, für welche

$$\log\,(a^w) = w\,.\log a$$

ist. Bezeichnet nun $e$ die reelle Zahl, für welche log $e$ den Werth 1 hat, ist also $e$ durch die Gleichung

$$\int_1^e \frac{dz}{z} = 1$$

definirt, so hat man

$$\log\,(e^w) = w.$$

Daher ist $e^w$ die inverse Function des Logarithmus, denn für $e^w = z$ folgt nun $w = \log z$. Eigentlich ist zwar log $e$ nicht bloss $= 1$, sondern auch $= 1 + 2n\pi i$; man berücksichtigt aber nur den ersteren Werth, d. h. man lässt in dem vorstehenden Integrale $z$ nur reelle Werthe durchlaufen. Aus der Gleichung (6)

$$\frac{d\log z}{dz} = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$$

folgt nun

$$\frac{dz}{dw} = z,$$

also

(8) $$\frac{de^w}{dw} = e^w .$$

Nimmt man für $z$ eine complexe Grösse, welche den Modul 1 hat, setzt man also

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

so hat man in der Gleichung (7)

$$\log z = \log r + i\varphi$$

$r = 1$ und daher $\log r = 0$ zu setzen. Demnach ist

$$\log(\cos\varphi + i\sin\varphi) = i\varphi$$

und folglich

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Die Exponentialfunction ist periodisch, denn da einem Werthe von $z$ nicht bloss der Werth $w$, sondern auch die Werthe $w \pm 2n\pi i$ angehören, so ist

$$z = e^w = e^{w \pm 2n\pi i},$$

also ändert sich $e^w$ nicht, wenn $w$ um ein Vielfaches des **Periodicitätsmoduls** $2\pi i$ vermehrt oder vermindert wird.

Versuchen wir nun, die Fläche $T'$ der $z$ auf einer Ebene $W$ der $w$ abzubilden. Wir nehmen dazu am einfachsten als Querschnitt eine durch 0 und 1 gehende Gerade an (Fig. 32). Nun ist

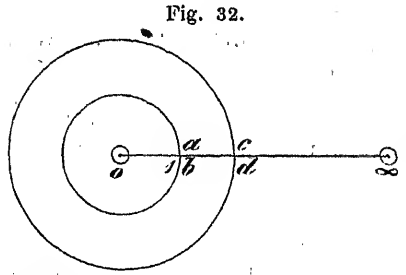
$$w = \log r + i\varphi,$$

wenn

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

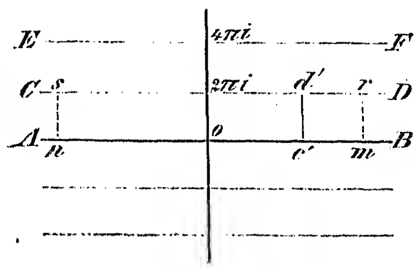
gesetzt wird. Daher sind $\log r$ und $\varphi$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes $w$. Lassen wir dann $z$ einen Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt in der Richtung der wachsenden Winkel von $a$ nach $b$ beschreiben, so ist $\log r = 0$, und folglich ist $w$ rein imaginär und geht auf der $y$-Axe von 0 bis $2\pi i$ (Fig. 33). Geht man ferner mit $z$ von $a$ längs der linken Seite des Querschnittes in's Unendliche, so bleibt $\varphi = 0$, und $\log r$ geht von 0 durch die positiven Werthe in's Unendliche, also beschreibt $w$ den positiven Theil der Hauptaxe. Geht aber $z$ von $a$ auf der linken Seite des Querschnittes nach 0, so beschreibt $w$ den negativen Theil der Hauptaxe in's Unendliche. Ist $z$ zuerst um den Nullpunkt herum nach $b$ auf die rechte Seite des Querschnittes gelangt und geht

Fig. 32.



dann längs der rechten Seite desselben nach $\infty$ oder nach 0, so ist $w$ zuerst auf der $y$-Axe von 0 bis $2\pi i$ gegangen und beschreibt dann, da nun $\varphi$ constant $= 2\pi$ bleibt, eine der Hauptaxe parallele Gerade, einmal nach der positiven und dann nach der negativen Richtung. Den beiden Seiten des Querschnittes in $T'$ entsprechen daher in $W$ zwei verschiedene Linien, der linken die Hauptaxe $AB$, der rechten eine durch $2\pi i$ mit der Hauptaxe parallel laufende Gerade $CD$ (Fig. 33).

Fig. 33.




Lässt man nun $z$ an irgend einer Stelle von der linken Seite $c$ des Querschnittes auf einem Kreise um den Nullpunkt auf die rechte Seite $d$ gelangen, so bleibt $r$ und daher auch $\log r$ constant, und $\varphi$ wächst von 0 bis $2\pi$. Folglich beschreibt $w$ eine der $y$-Axe parallele Gerade $c'd'$ von der Hauptaxe $AB$ bis zu der Parallelen $CD$. Daraus folgt, dass allen Punkten $z$ in der ganzen unendlichen Ausdehnung der Fläche $T'$, in welcher $\varphi$ nicht über $2\pi$ hinaus wachsen kann, nur solche Punkte $w$ entsprechen, die innerhalb des von den beiden Parallelen $AB$ und $CD$ gebildeten Streifens liegen. Die Function $e^w$ oder $z$ nimmt also innerhalb dieses Streifens ihre sämmtlichen Werthe an, und zwar jeden nur einmal, denn irgend zwei verschiedenen Werthen von $w = \log r + i\varphi$ gehören auch verschiedene Werthe von $r$ oder $\varphi$ und also auch verschiedene Werthe von

$$e^w = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

an. Will man die Fläche $T'$ begrenzen, so kann dies einerseits dadurch geschehen, dass man um den Nullpunkt einen Kreis mit einem sehr kleinen Radius $\varrho$ beschreibt; diesem entspricht, da $\varrho$ constant bleibt, in $W$ eine der $y$-Axe parallele Gerade $ns$ zwischen den beiden Parallelen $AB$ und $CD$, welche sehr weit vom Nullpunkte entfernt auf der negativen Seite liegt. Diese rückt in's Unendliche, wenn $\varrho$ bis zum Verschwinden abnimmt, also der Kreis in den Nullpunkt zusammenschrumpft. In allen Punkten dieser in's Unendliche gerückten Geraden $ns$ hat daher $e^w$ den Werth Null. Andererseits kann die Begrenzung von $T'$ durch einen Kreis um den Nullpunkt mit einem sehr grossen Radius $R$ gebildet werden. Diesem entspricht in $W$ eine auf der positiven Seite sehr weit entfernte Gerade $mr$ parallel der $y$-Axe. Wächst

Fig. 32.

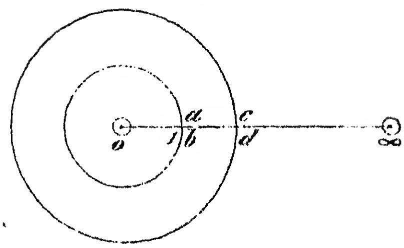
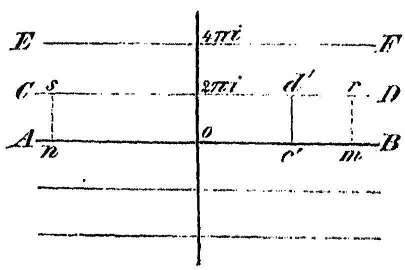


Fig. 33.



$R$ in's Unendliche, so rückt auch diese Gerade in's Unendliche, und in allen ihren Punkten ist $e^w$ unendlich gross. Die Fläche $T'$ kann im Unendlichen geschlossen angenommen werden, dann wird der Kreis mit dem grossen Radius $R$ durch einen kleinen Kreis um den Punkt $\infty$ vertreten, welcher in diesen Punkt zusammenschrumpft, wenn $R$ in's Unendliche wächst. Dann bilden also die beiden Seiten des von 0 nach $\infty$ gehenden Querschnittes allein die Begrenzung der geschlossenen Fläche $T'$, und dieser entspricht der nach beiden Seiten in's Unendliche gehende Streifen zwischen den Parallelen $AB$ und $CD$.

Lassen wir jetzt den Winkel $\varphi$ über $2\pi$ hinaus wachsen, so setzt sich die Function $w$ oder $\log z$ stetig fort; dann kann man sich den Querschnitt wie einen Verzweigungsschnitt denken, über den hinüber die Fläche $T'$ sich in ein zweites Blatt fortsetzt. In diesem zweiten Blatte verhält sich dann alles wie im ersten, nur dass in allen Punkten desselben $\varphi$ um $2\pi$, also $w$ um $2\pi i$ grösser ist, als an der entsprechenden Stelle im ersten Blatte. Daher erhält man in $W$ einen zweiten Streifen zwischen den Parallelen $CD$ und $EF$, welche durch $2\pi i$ und $4\pi i$ hindurchgehen. Setzt man diese Betrachtung fort und wendet sie auch auf negative Werthe von $\varphi$ an, so wird die Ebene $W$ in unendlich viele parallele Streifen getheilt. In jedem nimmt die Function $e^w$ ihre sämmtlichen Werthe einmal an und hat in je zwei entsprechenden Punkten zweier verschiedener Streifen die nämlichen Werthe. Auf der positiven Seite jedes Streifens geht $e^w$ in's Unendliche, auf der negativen Seite aber nähert es sich der Null.

# Sechster Abschnitt.

## Allgemeine Eigenschaften der Functionen.

### § 24.

Die Grundlage für die folgenden Untersuchungen bildet der überaus wichtige, in § 20 bewiesene Satz: Wird das Integral $\int f(z)\, dz$ auf die Begrenzung eines Flächentheils ausgedehnt, in welchem $f(z)$ nur in einem Punkte $z = a$, der kein Verzweigungspunkt ist, unstetig wird, und zwar so, dass $(z - a) f(z)$ sich für $z = a$ einem bestimmten endlichen Grenzwerthe $p$ nähert, so ist

$$\int f(z)\, dz = 2 \pi i p.$$

Ist nun $\varphi(z)$ eine Function, die in einem Flächentheile $T$ keine Verzweigungspunkte besitzt und darin vollkommen stetig bleibt, und bedeutet $t$ einen beliebigen Punkt dieser Fläche, so hat die Function

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - t}$$

in $T$ die in dem vorigen Satze verlangten Eigenschaften. Sie wird nur unstetig für $z = t$, und da sie ebenso wie $\varphi(z)$ keine Verzweigungspunkte innerhalb $T$ besitzt, so kann $t$ niemals auf einen solchen fallen; ferner wird $f(z)$ für $z = t$ so unstetig, dass

$$(z - t) f(z) = \varphi(z)$$

sich einem bestimmten endlichen Grenzwerthe, nämlich $\varphi(t)$, nähert. Man hat also

$$\int \frac{\varphi(z)\, dz}{z - t} = 2 \pi i\, \varphi(t)$$

und daher

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z)\, dz}{z - t}, \tag{9}$$

das Integral auf die Begrenzung von $T$ erstreckt.

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist an die Voraussetzung geknüpft, dass die obigen Bedingungen erfüllt sind, dass also $\varphi(z)$ innerhalb $T$ sich nicht verzweige, darin durchaus stetig sei und in jedem Punkte $t$ einen völlig bestimmten Werth besitze. Die Gleichung gilt also z. B. nicht bei der Function $\varphi(z) = \sin \frac{1}{z}$

an der Stelle $t = 0$, da die Function hier einen bestimmten Werth nicht hat. Ein ähnliches Beispiel bietet die Function

$$\varphi(z) = \frac{1}{e^{\frac{1}{z}} + c},$$

in welcher $c$ eine Constante bedeute, ebenfalls für $t = 0$ dar. Da $e^{\frac{1}{z}}$ unendlich gross oder Null ist, je nachdem $z$ sich durch die positiven oder durch die negativen Werthe der Null nähert, so ist

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{z}} + c} = \begin{cases} 0 & \text{für } z = +0 \\ \frac{1}{c} & \text{für } z = -0. \end{cases}$$

In solchen Fällen hört auch die Stetigkeit der Function auf. Lässt man z. B. in dem zuletzt angeführten Falle die Variable $z$ die reellen Werthe wachsend durchlaufen, so springt die Function beim Ueberschreiten des Werthes $z = 0$ plötzlich von $\frac{1}{c}$ nach $0$ über.

Wenn aber die obigen Bedingungen erfüllt sind, so wird durch die Gleichung (9) der Werth der Function $\varphi$ für jeden Punkt $t$ im Innern von $T$ durch ein Integral gegeben, bei welchem die Variable $z$ nur die Punkte der Begrenzung von $T$ durchläuft; dieses Integral hat in der That für jeden im Innern von $T$ liegenden Punkt $t$ einen endlichen und bestimmten Werth und ändert sich stetig mit $t$. (S. unten.) Denkt man sich nun die Function $\varphi(z)$ nicht durch einen Ausdruck, sondern durch ihre Werthe für alle Punkte eines gewissen Gebietes gegeben, so folgt aus der vorigen Gleichung, dass wenn die Function nur für alle Punkte der Begrenzung von $T$ gegeben ist, sie für jeden Punkt im Innern von $T$ ebenfalls ermittelt werden kann und daher im Innern von $T$, wo sie nicht unstetig werden und sich nicht verzweigen soll, nicht mehr willkürlich angenommen werden darf.

Hat eine Function $\varphi(z)$ an der Begrenzung von $T$ überall den constanten Werth $C$, so erhält man aus (9)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{C\,dz}{z-t} = \frac{C}{2\pi i}\int \frac{dz}{z-t}.$$

Dieses Integral behält aber seinen Werth, wenn man die Integrationscurve durch einen um $t$ beschriebenen Kreis ersetzt. Dann hat man (§ 20)

$$\int \frac{dz}{z-t} = 2\pi i;$$

mithin wird für jeden Werth von $t$

$$\varphi(t) = C.$$

Ist also eine Function in einem Gebiete $T$ überall stetig und eindrig, und hat sie an der Begrenzung von $T$ den constanten Werth $C$, so ist sie auch im Innern von $T$ überall constant gleich $C$.

Es folgt ferner aus (9) durch Differentiation nach $t$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^2}\,dz \\
\varphi''(t) &= \frac{2}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^3}\,dz \\
\varphi'''(t) &= \frac{2.3}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^4}\,dz \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi^{(n)}(t) &= \frac{2.3\ldots n}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Alle diese Integrale erstrecken sich auf die Begrenzung von $T$, daher verschwindet in ihnen niemals $z - t$. Bedeutet also $h$ irgend eine positive ganze Zahl, so ist

$$\frac{1}{(z-t)^h}$$

für jeden in Betracht kommenden Werth von $t$ endlich und ändert sich stetig mit $t$. Dasselbe gilt, wenn der vorige Bruch mit irgend einem von $t$ unabhängigen Werthe $\varphi(z)$ multiplicirt wird, es gilt also auch von der durch das Integral

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-t)^h}$$

dargestellten Summe, bei welcher $z$ nach und nach alle an der Begrenzung von $T$ stattfindenden Werthe anzunehmen hat. Demnach sind alle die vorigen Integrale, so wie auch das in (9) enthaltene innerhalb $T$ endliche und stetige Functionen von $t$.*) Hieraus folgt der Satz: Wenn eine Function in einem Gebiete keine Verzweigungspunkte besitzt und darin endlich und stetig ist und nirgend unbestimmt wird, so sind auch alle ihre Derivirten in demselben Gebiete endliche und stetige Functionen.

*) *C. Neumann*, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, pag. 91.

Bezieht man in der Gleichung (9) die Integration auf einen beliebig kleinen Kreis um den Punkt $t$ mit dem Radius $r$ und setzt zu dem Ende

$$z - t = r\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

so ist

$$\frac{dz}{z-t} = i\,d\vartheta,$$

und daher

$$\varphi\,(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\,(z)\,d\vartheta.$$

Setzt man nun

$$\varphi\,(z) = u + iv \qquad \varphi\,(t) = u_0 + iv_0,$$

so erhält man durch Sonderung des Reellen vom Imaginären

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\vartheta \qquad v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\vartheta.$$

Hieraus folgt, dass die reellen Bestandtheile der Function $\varphi$ im Punkte $t$ Mittelwerthe aus allen ringsherum liegenden benachbarten Werthen dieser Bestandtheile sind. Es muss also $u_0$ grösser als ein Theil, und zugleich kleiner als ein anderer Theil dieser Nachbarwerthe sein. Dasselbe gilt von $v_0$, und da das Nämliche in jedem Punkte des Gebietes $T$ stattfindet, so haben die reellen Bestandtheile der Function $\varphi$ in keinem Punkte von $T$ einen Maximal- oder einen Minimalwerth.

## § 25.

Mit Hülfe der Gleichung (9) kann die Function $\varphi$ in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Man beschreibe um einen beliebigen Punkt $a$ des Gebietes $T$ einen Kreis, der noch ganz in dieses Gebiet hineinfällt, und also noch nicht ganz bis an den zunächst an $a$ gelegenen Unstetigkeitspunkt oder Verzweigungspunkt hinanreicht; diesen Kreis nehme man als Integrationscurve in der Gleichung (9). Dabei kann der Punkt $a$ so gewählt werden, dass der Kreis einen möglichst grossen Theil des Gebietes $T$ umfasst. Nun ist für jeden im Inneren des Kreises liegenden Punkt $t$

$$\operatorname{mod}\,(z - a) > \operatorname{mod}\,(t - a)$$

(Fig. 34), da $z$ bei der Integration nur Punkte der Peripherie des Kreises durchläuft. Man kann aber schreiben

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-a-(t-a)} = \frac{1}{z-a} \, \frac{1}{1-\frac{t-a}{z-a}}$$

und diesen Bruch, weil

$$\operatorname{mod} \frac{t-a}{z-a} < 1$$

ist, in die convergirende Reihe

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-a} \left\{ 1 + \frac{t-a}{z-a} + \frac{(t-a)^2}{(z-a)^2} + \frac{(t-a)^3}{(z-a)^3} + \ldots\ldots \right\}$$

entwickeln. Substituirt man diese Reihe in (9), so erhält man

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-a} + (t-a) \int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^2} + (t-a)^2 \int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^3} + \ldots \right\} \quad (11)$$

und dies ist nichts anderes als die Taylor'sche Reihe; denn nach (9) ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-a} = \varphi(a) \quad (12)$$

und nach den Gleichungen (10)

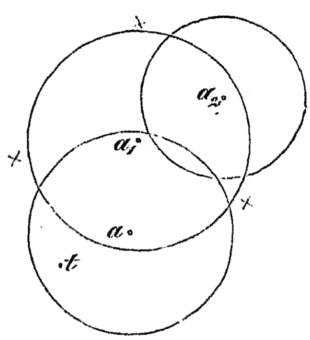
$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{\varphi^{(n)}(a)}{2.3\ldots n}, \quad (13)$$

also erhält man

$$\varphi(t) = \varphi(a) + (t-a)\,\varphi'(a) + (t-a)^2 \frac{\varphi''(a)}{2} + (t-a)^3 \frac{\varphi'''(a)}{2.3} + \ldots \quad (14)$$

Diese Ableitung der Taylor'schen Reihe hat den Vortheil, dass sie mit Bestimmtheit erkennen lässt, wie weit sich die Convergenz dieser Reihe erstreckt: nämlich auf alle Punkte $t$, welche von $a$ weniger weit entfernt sind, als der nächste Unstetigkeitspunkt oder Verzweigungspunkt. In Fig. 34 sind drei solcher Punkte durch Kreuze angedeutet worden.

Fig. 34.




In der Reihe (11) sind zwar ursprünglich alle Integrationen längs des Kreises um $a$ zu nehmen; aber da die Functionen

$$\frac{\varphi(z)}{z-a}, \quad \frac{\varphi(z)}{(z-a)^2}, \quad \frac{\varphi(z)}{(z-a)^3}, \text{ etc.}$$

bis an den Punkt $a$ heran endlich und stetig bleiben, so können

die Integrale auch längs eines beliebig kleinen um $a$ beschriebenen Kreises genommen werden, ohne ihre Werthe zu ändern. Wenn daher die Function $\varphi$ durch ihre Werthe in einem beliebig kleinen endlichen, den Punkt $a$ enthaltenden Flächenstücke gegeben ist, so sind dadurch alle jene Integrale, mithin alle Coefficienten der convergirenden Reihe bestimmt, und folglich kann der Werth der Function für jeden Punkt im Innern des grossen Kreises ermittelt werden.

Ist nun $a_1$ ein Punkt, der noch im Innern dieses Kreises liegt, so ist also jetzt $\varphi(t)$ sowohl in $a_1$ als auch in dem ihn zunächst umgebenden Flächentheile bekannt. Beschreibt man dann um $a_1$ einen Kreis, der noch alle Unstetigkeitspunkte und Verzweigungspunkte ausserhalb lässt (Fig. 34), so kann $\varphi(t)$ für alle Punkte dieser Kreisfläche in eine neue Reihe entwickelt werden. Fährt man so fort, so sieht man, wenn die Function $\varphi(t)$ nur innerhalb eines beliebig kleinen endlichen Theiles eines Gebietes $T$ gegeben ist (oder eigentlich nur längs einer beliebig kleinen geschlossenen Linie), dass sie dann schon in dem ganzen Gebiete $T$, in welchem weder ein Unstetigkeitspunkt noch ein Verzweigungspunkt liegt, bestimmt werden kann.

Dasselbe gilt, wenn die Function $\varphi(t)$ nur längs einer beliebig kleinen endlichen von $a$ ausgehenden Linie gegeben ist. Ist dies nämlich der Fall, und bezeichnet man die stetig auf einander folgenden Punkte dieser Linie mit $a$, $b$, $c$, $d$, etc., so ist

$$\varphi'(a) = \lim \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a},$$

also bekannt, wenn $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ bekannt sind. Ebenso ist

$$\varphi'(b) = \lim \frac{\varphi(c) - \varphi(b)}{c - b},$$

wodurch $\varphi'(b)$ bekannt wird. In dieser Weise können die Werthe der Derivirten $\varphi'(t)$ für alle Punkte $a$, $b$, $c$, $d$, etc. gefunden werden. Alsdann ist

$$\varphi''(a) = \lim \frac{\varphi'(b) - \varphi'(a)}{b - a}$$

$$\varphi''(b) = \lim \frac{\varphi'(c) - \varphi'(b)}{c - b}$$

u. s. w., sodass auch die zweiten Derivirten bekannt sind. Fährt man in dieser Weise fort, so können die Werthe aller Derivirten für den Punkt $a$, also auch alle Coefficienten der Reihe (14) bestimmt werden. Man erhält also für jeden Punkt $a_1$ innerhalb des ersten Kreises $\varphi(a_1)$ durch eine convergente Reihe ausgedrückt. Durch Differentiation derselben ergeben sich dann auch die Werthe

der Derivirten $\varphi'(a_1)$, $\varphi''(a_1)$ etc. Kennt man dann die Werthe der Function $\varphi(t)$ und ihrer Derivirten für den Punkt $a_1$, so können dieselben Grössen für jeden Punkt des zweiten Kreises durch convergente Reihen ausgedrückt werden, u. s. f.

Aus dem Vorigen folgt der Satz: Eine Function einer complexen Variablen, welche in einem beliebig kleinen endlichen Theile der $z$-Ebene gegeben ist, kann darüber hinaus nur auf eine Weise stetig fortgesetzt werden.

Als einen speciellen Fall dieses Satzes heben wir hervor: Wenn eine Function in einem endlichen beliebig kleinen Theile des Gebietes $T$ constant ist, so ist sie überall in $T$ constant. Denn ist sie in einer kleinen Fläche, die den Punkt $a$ enthält, constant $= C$, so nehme man in den Gleichungen (12) und (13) als Integrationscurve einen innerhalb dieses kleinen Flächentheils liegenden Kreis um $a$ und setze

$$z - a = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

dann folgt aus (12)

$$\varphi(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z)\,d\vartheta = \frac{C}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta = C,$$

weil $\varphi(z)$ in allen Punkten der Peripherie des Kreises den Werth $C$ besitzt. Ferner wird aus (13)

$$\frac{\varphi^{(n)}(a)}{2.3\ldots n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}\,d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\frac{C}{r^n}\int_0^{2\pi}(\cos n\vartheta - i\sin n\vartheta)\,d\vartheta,$$

und dieser Werth verschwindet, weil für jeden ganzzahligen von Null verschiedenen Werth von $n$

$$\int_0^{2\pi}\cos n\vartheta\,d\vartheta = 0 \quad\text{und}\quad \int_0^{2\pi}\sin n\vartheta\,d\vartheta = 0$$

ist. In der Reihe (11) wird also $\varphi(a) = C$, und alle übrigen Glieder verschwinden, daher ist für jeden Punkt des Convergenzkreises $\varphi(t) = C$. Setzt man nun die Function in der oben angedeuteten Weise fort, so bleibt $\varphi(t)$ überall constant $= C$.

Dasselbe gilt, wenn $\varphi(t)$ längs einer beliebig kleinen endlichen Linie constant ist. In diesem Falle sind bei Anwendung der obigen Bezeichnung die Werthe $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$, etc. alle

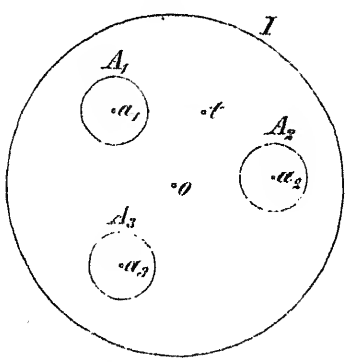
gleich $C$, und folglich verschwinden wieder alle Derivirten $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$, etc., und damit alle Coefficienten der Reihe (14) mit Ausnahme des ersten, welcher $= C$ ist. Es gilt also dasselbe wie oben.

Aus diesem speciellen Satze kann wieder der vorhergehende allgemeinere abgeleitet werden. Wenn nämlich zwei Functionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ in einem beliebig kleinen Flächen- oder Linientheile in ihren Werthen übereinstimmen, so ist in diesem Theile die Function $\varphi(t) - \psi(t)$ constant gleich Null; folglich ist diese Function überall gleich Null, d. h. es ist überall $\psi(t) = \varphi(t)$, und daher kann die Function $\varphi(t)$ von dem Theile aus, in dem sie gegeben ist, nicht auf zwei verschiedene Weisen fortgesetzt werden.

## § 26.

Wir gehen nun zur Entwickelung einer Function innerhalb eines Gebietes über, in dem auch Unstetigkeitspunkte der Function liegen, schliessen aber Verzweigungspunkte davon aus. Wir wollen hier nur den Fall behandeln, dass die Function gar keine Verzweigungspunkte besitzt, und können in diesem Falle das Gebiet auf die ganze unendliche Ebene ausdehnen.

Fig. 35.




Seien $a_1$, $a_2$, $a_3$, etc. die Punkte innerhalb $T$, in denen $\varphi(t)$ unstetig ist. Wir legen erstlich um den Nullpunkt einen Kreis $(I)$ mit dem Radius $R$, welcher alle diese Punkte umgiebt (Fig. 35); ausserdem um jeden der Punkte $a_1$, $a_2$, $a_3$, etc. einen kleinen Kreis $(A_1)$, $(A_2)$, $(A_3)$, etc., resp. mit den Radien $r_1$, $r_2$, $r_3$, etc. Alle diese Kreise $(A)$ und $(I)$ zusammengenommen bilden dann die Begrenzung eines Gebietes $U$, innerhalb dessen $\varphi(t)$ stetig ist. Für jeden Punkt $t$ im Innern von $U$ ist daher (§ 24)

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)}{z-t}\,dz,$$

das Integral auf die ganze Begrenzung von $U$ ausgedehnt. Dasselbe zerlegt sich in so viele Theile, als Begrenzungsstücke vor-

handen sind. Wir bezeichnen die auf die letzteren, also auf die Kreise $(I)$, $(A_1)$, $(A_2)$, $(A_3)$, etc. sämmtlich in der positiven Begrenzungsrichtung (§ 17) erstreckten Integrale durch $I$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc. und haben dann

$$\varphi(t) = I + A_1 + A_2 + A_3 + \dots\dots.$$

Dann wird der Kreis $(I)$ in der Richtung der wachsenden Winkel, jeder der Kreise $(A_k)$ aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, folglich ist, wenn man jetzt alle Integrationen in der Richtung der wachsenden Winkel ausführt,

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-t} \qquad A_k = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-t}.$$

Setzt man dann in $I$

$$z = R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \text{ also } \frac{dz}{z} = i\,d\vartheta$$

und in $A_k$

$$z - a_k = r_k(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \text{ also } \frac{dz}{z-a_k} = i\,d\vartheta,$$

so kann man auch schreiben

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\,\varphi(z)}{z-t}\,d\vartheta, \quad A_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(z-a_k)\,\varphi(z)}{z-t}\,d\vartheta.$$

Nun liegt $t$ immer innerhalb der von $(I)$ begrenzten Kreisfläche; daher ist bei $I$ für jeden Punkt $t$

$$\operatorname{mod} z > \operatorname{mod} t,$$

folglich kann $\frac{z}{z-t}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{t}{z}$ in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Man erhält nämlich

$$\frac{z}{z-t} = \frac{1}{1-\frac{t}{z}} = 1 + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{z^2} + \frac{t^3}{z^3} + \dots\dots,$$

also

$$I = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} \varphi(z)\,d\vartheta + t\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z}\,d\vartheta + t^2\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^2}\,d\vartheta + \dots\right\}$$

oder

$$I = Q + Q't + Q''t^2 + Q'''t^3 + \dots,$$

wenn man der Kürze wegen

$$Q^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^m}\, d\vartheta$$

setzt, das Integral auf den Kreis $(I)$ mit dem Radius $R$ in der Richtung der wachsenden Winkel erstreckt.

Jeder Punkt $t$ des Gebietes $U$ liegt ferner ausserhalb aller von den Kreisen $(A_k)$ begrenzten Kreisflächen. Daher ist in jedem Integrale $A_k$

$$\text{mod}\,(t - a_k) > \text{mod}\,(z - a_k),$$

folglich kann $\frac{z-a_k}{z-t}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{z-a_k}{t-a_k}$, d. h. nach fallenden Potenzen von $t - a_k$ in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Dann erhält man

$$\frac{z-a_k}{z-t} = \frac{z-a_k}{z-a_k-(t-a_k)} = -\frac{z-a_k}{t-a_k} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a_k}{t-a_k}},$$

also

$$-\frac{z-a_k}{z-t} = \frac{z-a_k}{t-a_k} + \frac{(z-a_k)^2}{(t-a_k)^2} + \frac{(z-a_k)^3}{(t-a_k)^3} + \cdots\cdots$$

und durch Substitution in $A_k$

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{t-a_k}\int\limits_0^{2\pi}(z-a_k)\,\varphi(z)\,d\vartheta + \frac{1}{(t-a_k)^2}\int\limits_0^{2\pi}(z-a_k)^2\,\varphi(z)\,d\vartheta\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(t-a_k)^3}\int\limits_0^{2\pi}(z-a_k)^3\,\varphi(z)\,d\vartheta + \cdots\right\}$$

oder

$$A_k = \frac{c_k'}{t-a_k} + \frac{c_k''}{(t-a_k)^2} + \frac{c_k'''}{(t-a_k)^3} + \cdots\cdots,$$

wenn man der Kürze wegen

$$c_k^{(p)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(z-a_k)^p\,\varphi(z)\,d\vartheta$$

setzt. Durch Substitution dieser Reihen erhält man nun vollständig

$$\left.\begin{array}{l|l}
\varphi(t) = Q + Q' t + Q'' t^2 + Q''' t^3 + \cdots + Q^{(m)} t^m + \cdots & = I \\
+ \dfrac{c_1'}{t-a_1} + \dfrac{c_1''}{(t-a_1)^2} + \dfrac{c_1'''}{(t-a_1)^3} + \cdots + \dfrac{c_1^{(p)}}{(t-a_1)^p} + \cdots & + A_1 \\
+ \dfrac{c_2'}{t-a_2} + \dfrac{c_2''}{(t-a_2)^2} + \dfrac{c_2'''}{(t-a_2)^3} + \cdots + \dfrac{c_2^{(p)}}{(t-a_2)^p} + \cdots & + A_2 \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & + \cdots \\
+ \dfrac{c_k'}{t-a_k} + \dfrac{c_k''}{(t-a_k)^2} + \dfrac{c_k'''}{(t-a_k)^3} + \cdots + \dfrac{c_k^{(p)}}{(t-a_k)^p} + \cdots & + A_k \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , & + \cdots
\end{array}\right\} \quad (15)$$

wobei

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{(m)}{Q} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\varphi(z)}{z^m}\, d\vartheta, \quad \text{auf } (I) \text{ erstreckt} \\[2ex]
\overset{(p)}{c_k} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} (z - a_k)^p\, \varphi(z)\, d\vartheta, \quad \text{auf } (A_k) \text{ erstreckt.}
\end{array}\right\} \quad (16)$$

Wenn im Inneren des Kreises $(I)$ keine Unstetigkeitspunkte $a$ vorhanden sind, so fallen aus der Gleichung (15) die Reihen $A_k$ heraus. Die übrig bleibende Reihe

$$\varphi(t) = Q + Q' t + Q'' t^2 + \cdots + Q^{(m)} t^m + \cdots \quad (17)$$

ist dann die Mac-Laurin'sche und entsteht aus der Taylor'schen, § 25 (14), wenn man darin $a = 0$ setzt. In der That hat man dann nach (13) § 25

$$\frac{\varphi^{(m)}(0)}{2 \cdot 3 \ldots m} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z)\, dz}{z^{m+1}}.$$

Bezieht man aber dieses Integral auf den Kreis $(I)$ und setzt demgemäss $\frac{dz}{z} = i\, d\vartheta$, so erhält man

$$\frac{\varphi^{(m)}(0)}{2 \cdot 3 \ldots m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)\, d\vartheta}{z^m} = Q^{(m)}.$$

# Siebenter Abschnitt.

## Ueber das unendlich gross und unendlich klein Werden der Functionen.

### § 27.

Wenn eine Function in einem Punkte $z = a$, von dem wir zunächst annehmen wollen, dass er kein Verzweigungspunkt sei, eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, so kann dies, wie schon pag. 100 erwähnt wurde, dadurch geschehen, dass die Function in dem Punkte $a$ verschiedene Werthe erhält, wenn die Variable sich demselben von verschiedenen Seiten her nähert. Kann durch den Punkt $a$ eine Linie $man$ so gelegt werden, dass die Function auf dem Wege $ma$ in $a$ einen anderen Werth erhält, als auf dem Wege $na$, so springt die Function, wenn $z$ auf der Linie $man$ den Punkt $a$ überschreitet, plötzlich von dem ersteren zu dem letzteren Werthe über. Wir haben pag. 100 ein Beispiel hiefür gegeben, und in dem angeführten Falle sind die Werthe, zwischen denen der Sprung stattfindet, beide endlich. Es kann aber auch der Fall eintreten, dass einer von ihnen unendlich gross ist. Dies tritt z. B. bei der Function $e^{\frac{1}{z}}$ für $z = 0$ ein; lässt man die Variable $z$ auf der Hauptaxe (die reellen Werthe durchlaufend) von der negativen Seite nach der positiven den Nullpunkt überschreiten, so springt die Function von 0 nach $\infty$ über. Eine Unstetigkeit der letzteren Art kann auch für einen unendlich grossen Werth der Variablen statt haben, wie z. B. bei $e^z$, welches unendlich gross oder Null wird, je nachdem $z$ durch die positiven oder durch die negativen Werthe in's Unendliche geht.

Eine Function wird aber in dem Punkte $a$ auch dann unstetig, wenn sie in ihm stets unendlich gross wird, von welcher Seite her die Variable sich ihm auch immer nähern möge. Diese Art von Unstetigkeit ist für uns besonders wichtig, und möge nach dem Vorgange von *C. Neumann* eine polare Unstetigkeit genannt werden. Man kann sie auch so definiren, dass man sagt: Eine Function $\varphi(z)$ erleidet in dem Punkte $z = a$ eine polare Unstetigkeit, wenn sie in demselben so unstetig wird, dass die reciproke Function $\frac{1}{\varphi(z)}$ an dieser Stelle vollkommen stetig ist.*) Denn wenn

*) *C. Neumann*, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. pag. 94.

dies der Fall ist, so muss $\frac{1}{\varphi(a)} = 0$ und $\varphi(a) = \infty$ sein, sonst würde $\varphi(z)$ in $a$ nicht unstetig werden; es muss aber $\varphi(a)$ unendlich gross sein für jeden Weg, auf dem die Variable $z$ sich dem Punkte $a$ nähert, sonst erhielte auch $\frac{1}{\varphi(a)}$ nicht auf jedem dieser Wege den Werth Null und würde nicht stetig sein.

Die letztere Definition einer polaren Unstetigkeit lässt sich auch sofort auf den Fall ausdehnen, dass der Unstetigkeitspunkt $a$ ein Verzweigungspunkt ist. Zu bemerken ist nur, dass in einem solchen nicht nothwendig alle Werthe, deren die Function für $z = a$ fähig ist, unendlich gross zu werden brauchen, sondern nur irgend eine Gruppe unter ihnen.

Wir werden uns nun im Folgenden lediglich auf die Betrachtung polarer Unstetigkeiten beschränken; wir werden nur solche Flächentheile zulassen, in denen eine Function keine anderen als polare Unstetigkeiten annimmt, und wenn wir die Untersuchung auf die ganze unendliche $z$-Fläche ausdehnen, so werden wir ausschliesslich nur solche Functionen betrachten, die übrigens stetig bleiben und nur in einzelnen Punkten polare Unstetigkeiten erleiden. Wenn wir in der Folge sagen, dass eine Function in einem Punkte unendlich gross wird, so soll darunter immer verstanden werden, dass in dem betreffenden Punkte eine polare Unstetigkeit eintritt.

Die nähere Untersuchung der polaren Unstetigkeiten oder des unendlich gross Werdens der Functionen macht es aber nöthig, diejenigen Functionen, welche keine Verzweigungspunkte besitzen, von den übrigen zu trennen und zuerst abgesondert zu betrachten, sowohl weil sie die Grundlage für die Untersuchung der übrigen bilden, als auch weil sie vor den übrigen einige ausgezeichnete Eigenschaften voraus haben. Doch gelten die Sätze, die sich nur auf endliche Flächentheile beziehen, auch von den mit Verzweigungspunkten behafteten Functionen, sobald nur in dem zu berücksichtigenden Flächentheile keine Verzweigungspunkte der Function liegen. Die Functionen ohne Verzweigungspunkte sind die eindeutigen Functionen. Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche werden zu diesen aber auch diejenigen gerechnet, welche wie die oben angeführten, z. B. $e^{\frac{1}{z}}$ zwar im Allgemeinen für jeden Werth der Variablen nur einen Werth besitzen, in einzelnen Punkten jedoch mehr als einen Werth annehmen können, wenn die Variable sich einem solchen Punkte auf verschiedenen Wegen nähert, und dadurch eben eine nicht polare Unstetigkeit erleiden. Da die letzteren ausgeschlossen werden sollen, so müssen auch die erwähnten Func-

tionen ausgeschlossen oder doch nur innerhalb solcher Flächentheile betrachtet werden, in denen Punkte der beregten Art nicht vorkommen. Da die Function innerhalb eines solchen Flächentheils dann für jeden Punkt ohne Ausnahme nur einen entweder endlichen oder unendlich grossen Werth besitzt, der unabhängig ist von dem Wege, auf dem die Variable zu dem Punkte gelangt, so wollen wir die Function innerhalb eines solchen Flächentheils einwerthig nennen, und überhaupt soll eine eindeutige Function, die keine anderen als polare Unstetigkeiten besitzt, eine einwerthige Function genannt werden. Nach diesen Definitionen gilt dann die Eigenschaft, dass eine einwerthige Function nur dadurch unstetig werden kann, dass sie unendlich gross wird. Wir betrachten also nun die Functionen zunächst nur in soweit sie einwerthig sind.

## A. Functionen ohne Verzweigungspunkte. Einwerthige Functionen.

### § 27a.

Wenn eine einwerthige Function $\varphi(z)$ für irgend einen Werth $z = a$ endlich bleibt, so nähert sich das Product $(z - a)\,\varphi(z)$ für $z = a$ der Null. Wir zeigen nun zuerst, dass auch das Umgekehrte stattfindet. Nehmen wir zunächst nur an, dass das Product $(z - a)\,\varphi(z)$ in dem Punkte $z = a$ nicht unendlich gross werde; dann ist dies Product eine in $a$ stetige Function, und ihre Werthe können daher nach § 25 (14) für alle in der Nähe von $a$ liegende Punkte durch eine nach Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe dargestellt werden. Sei

(1) $(z-a)\,\varphi(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \cdots,$

dann ist offenbar $c_0$ der Werth, den das Product $(z - a)\,\varphi(z)$ für $z = a$ hat. Hieraus folgt

$$\varphi(z) = \frac{c_0}{z-a} + c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \cdots,$$

mithin ist $\varphi(z)$ für $z = a$ unendlich gross, so lange $c_0$ von Null verschieden ist. Hat aber $c_0$ den Werth Null, d. h. ist

$$[\lim (z-a)\,\varphi(z)]_{z=a} = 0,$$

so fällt aus der Reihe (1) das erste Glied fort, es bleibt

$$\varphi(z) = c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + \cdots,$$

also ist dann die Function $\varphi(z)$ in $z = a$ endlich, und da sie

einwerthig ist, auch stetig. Demnach haben wir den Satz: Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine einwerthige Function in einem Punkte $z = a$ endlich und stetig bleibt, ist

$$\Big[\lim (z - a)\, \varphi(z)\Big]_{z=a} = 0.$$

## § 28.

Wenn eine einwerthige Function für keinen endlichen oder unendlich grossen Werth der Variablen unendlich gross wird, so ist sie eine Constante. Man kann in diesem Falle die Function $\varphi(t)$ in eine nach Potenzen von $t$ fortschreitende Reihe entwickeln und erhält nach § 26 (17)

$$\varphi(t) = Q + Q't + Q''t^2 + \cdots + Q^{(m)}t^m + \cdots,$$

worin

$$Q^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^m}\, d\vartheta$$

ist, das Integral auf einen Kreis um den Nullpunkt erstreckt. Diese Reihe bleibt noch gültig, auch wenn der Punkt $t$ sich in's Unendliche entfernt, da $\varphi(t)$ der Annahme nach für alle Punkte endlich und daher auch stetig ist. Man kann demnach auch den Integrationskreis in $Q^{(m)}$ sich in's Unendliche ausdehnen lassen. Werden aber darin alle Werthe von $z$ unendlich gross, so verschwindet $Q^{(m)}$ für jeden Werth von $m$ mit Ausnahme von $m = 0$. Man hat also

$$Q' = Q'' = Q''' = \cdots = 0,$$

und die Reihe reducirt sich auf ihr erstes Glied, sodass die Function für jeden Werth von $t$ den constanten Werth $Q$ besitzt.

Man kann den Beweis dieses Satzes auch auf die Gleichung (9) § 24, nämlich

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z - t} \tag{1}$$

stützen. Denn bezieht man dieses Integral auf einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis, so kann man diesen wegen der angenommenen Eigenschaften der Function $\varphi(t)$ sich in's Unendliche ausdehnen lassen. Setzt man demgemäss

$$\frac{dz}{z} = i\,d\vartheta,$$

so wird

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z\,\varphi(z)}{z-t}\,d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{1-\frac{t}{z}}\,d\vartheta.$$

Wächst nun der Radius des Kreises in's Unendliche, so werden in dem Integrale alle Werthe von $z$ unendlich gross; daher verschwindet $\frac{t}{z}$, und das Integral reducirt sich auf den obigen von $t$ unabhängigen constanten Werth

(2) $$Q = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z)\,d\vartheta.$$

Anmerkung. Der letztere Beweis erlaubt, den vorliegenden Satz auf den Fall auszudehnen, dass die Function $\varphi(t)$ nicht mehr einwerthig im Sinne des § 27, sondern eindeutig nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche ist, d. h. wenn das Vorhandensein einer nicht polaren Unstetigkeit nicht von vorn herein ausgeschlossen ist, wenn die Function nur nirgend unendlich gross wird, also an einer etwa vorhandenen Unstetigkeitsstelle $a$ ein Sprung nur zwischen endlichen Werthen stattfindet. Alsdann hat nämlich das Product $(z-a)\,\varphi(z)$ in $a$ den Werth Null. Schliesst man nun den Punkt $a$ durch einen kleinen Kreis aus, so gilt die Gleichung (1) jedenfalls für das Gebiet, welches von diesem kleinen und dem um den Nullpunkt beschriebenen grösseren Kreise begrenzt wird, und das Integral ist auf jeden dieser beiden Kreise zu erstrecken. Setzt man aber in dem zweiten auf den Kreis um $a$ bezogenen Integrale

$$\frac{dz}{z-a} = i\,d\vartheta,$$

so erhält man für dieses den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(z-a)\,\varphi(z)}{z-t}\,d\vartheta.$$

Dieses Integral verschwindet daher zugleich mit dem Radius des kleinen Kreises, da $(z-a)\,\varphi(z)$ sich für $z = a$ der Null nähert. Mithin braucht in der Gleichung (1) das Integral bloss auf den äusseren Kreis ausgedehnt zu werden, und dann erleiden die obigen Schlussfolgerungen keine Aenderung. Der Satz erfährt auch keine Ausnahme durch die Zulassung des Falles, dass $\varphi(z)$ verschiedenen

Werthen sich nähert, wenn $z$ in verschiedenen Richtungen sich in's Unendliche entfernt, wenn nur diese Werthe alle endlich sind. Denn wenn auch in dem Integrale (2) die Function $\varphi(z)$ in verschiedenen Punkten des unendlich gross zu denkenden Integrationskreises verschiedene, aber immer endliche, Werthe besitzt, so hat dieses Integral doch einen von $t$ völlig unabhängigen constanten Werth.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar: Wenn eine einwerthige (oder eindeutige) Function nicht eine Constante ist, so muss sie nothwendig für irgend einen endlichen oder unendlichen Werth der Variablen unendlich gross werden.

Weiter folgt: Eine einwerthige (oder eindeutige) Function muss für irgend einen Werth der Variablen den Werth Null annehmen. Denn wird $\varphi(z)$ nirgend gleich Null, so wird $\frac{1}{\varphi(z)}$ nirgend unendlich gross, also wäre $\frac{1}{\varphi(z)}$ eine Constante, und daher auch $\varphi(z)$.

Endlich: Eine einwerthige (oder eindeutige) Function muss mindestens einmal jeden beliebigen Werth $k$ annehmen können. Denn wäre $\varphi(z)$ nirgend $= k$, so wäre $\varphi(z) - k$ nirgend gleich Null, also eine Constante, und folglich auch $\varphi(z)$ eine Constante.

Es verdient hervorgehoben zu werden, wie diese Sätze eine Harmonie in der Functionenlehre herstellen, die bei Ausschliessung complexer Werthe der Variablen nicht stattfindet. Berücksichtigt man bloss reelle Werthe der Variablen, so wird z. B. die eindeutige Function $\cos z$ nicht unendlich gross und nimmt nicht jeden beliebigen Werth an, sondern nur die Werthe zwischen $-1$ und $+1$. Es findet hier eine gewisse Analogie mit den algebraischen Gleichungen statt. Bei diesen bleiben auch die Fundamentalsätze, dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel haben muss, und dass jede Gleichung $n$ten Grades $n$ Wurzeln hat, nicht allgemein richtig, wenn man nur reelle Wurzeln berücksichtigt. Daher hat man in dieser Disciplin seit langer Zeit die complexen Wurzeln stets mit betrachtet. Es zeigt sich nun der grosse Werth, den die Einführung der complexen Variablen für die Functionenlehre hat, da auch hier gewisse allgemeine Sätze gelten, die bei Ausschliessung complexer Werthe der Variablen nicht mehr allgemein richtig bleiben.

## § 29.

Wir verstehen unter $\varphi(z)$ nun wieder eine einwerthige Function. Wenn das Product $(z - a)\,\varphi(z)$ bei unendlicher Annäherung

des $z$ an den Punkt $a$ nicht mehr gegen die Null convergirt, so wird $\varphi(z)$ für $z = a$ unendlich gross. Wir wollen nun aber annehmen, dass es eine Potenz von $z - a$ mit einem ganzen oder gebrochenen Exponenten $\mu$ gäbe, für welchen

$$(z - a)^{\mu} \varphi(z) \text{ nicht unendlich gross}$$

werde an der Stelle $z = a$. Bezeichnet dann $n$ die grösste in $\mu$ enthaltene ganze Zahl, sodass

$$n \leqq \mu < n + 1$$

sei, so ist

$$\lim (z - a)^{n+1} \varphi(z) = \lim (z - a)^{n+1-\mu} (z - a)^{\mu} \varphi(z) = 0,$$

weil $n + 1 - \mu$ positiv ist. Alsdann ist nach § 27a

$$(z - a)^{n} \varphi(z)$$

eine Function, welche für $z = a$ endlich bleibt. Bezeichnet $c^{(n)}$ den endlichen Grenzwerth derselben für $z = a$, so ist nun

$$(z - a)^{n} \varphi(z) - c^{(n)}$$

eine Function, welche für $z = a$ verschwindet, und folglich bleibt wieder nach § 27a

$$(z - a)^{n-1} \varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{z - a}$$

für $z = a$ endlich. Bezeichnet dann $c^{(n-1)}$ den endlichen Grenzwerth derselben, so verschwindet

$$(z - a)^{n-1} \varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{z - a} - c^{(n-1)}$$

für $z = a$, und folglich bleibt

$$(z - a)^{n-2} \varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{(z - a)^2} - \frac{c^{(n-1)}}{z - a}$$

an der Stelle $z = a$ endlich. Fährt man in dieser Weise fort, so gelangt man endlich zu einer Function

$$\varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{(z-a)^{n}} - \frac{c^{(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} - \frac{c^{(n-2)}}{(z-a)^{n-2}} - \cdots - \frac{c''}{(z-a)^2} - \frac{c'}{z-a},$$

welche für $z = a$ endlich und daher auch stetig ist. Setzt man also

$$\varphi(z) - \frac{c'}{z-a} - \frac{c''}{(z-a)^2} - \frac{c'''}{(z-a)^3} - \cdots - \frac{c^{(n)}}{(z-a)^{n}} = \psi(z),$$

so bedeutet $\psi(z)$ eine für $z = a$ endliche und stetige Function, und man erhält, wenn noch der Kürze wegen

$$(18) \qquad \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \frac{c'''}{(z-a)^3} + \cdots + \frac{c^{(n)}}{(z-a)^{n}} = A$$

gesetzt wird,

$$\varphi(z) = A + \psi(z), \tag{18a}$$

wobei

$$\begin{aligned}
c^{(n)} &= \lim (z-a)^n \varphi(z) \\
c^{(n-1)} &= \lim \left[ (z-a)^{n-1} \varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{z-a} \right] \\
c^{(n-2)} &= \lim \left[ (z-a)^{n-2} \varphi(z) - \frac{c^{(n)}}{(z-a)^2} - \frac{c^{(n-1)}}{z-a} \right]
\end{aligned}$$

u. s. w.

ist. Wenn nun die endliche Constante $c^{(n)}$ nicht den Werth Null hat, wenn also in dem Ausdrucke $A$ das Glied $\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n}$ nicht fehlt, d. h. wenn

$\lim (z-a)^n \varphi(z)$ weder Null noch unendlich

ist, so sagt man: die Function $\varphi(z)$ wird für $z = a$ unendlich gross von der $n$ten Ordnung. Dann ist aber für jeden gebrochenen Exponenten $\mu$ diese Bedingung nicht erfüllt, sondern $\lim (z-a)^\mu \varphi(z)$ wird entweder Null oder unendlich; denn ist, wie wir ursprünglich annahmen, $\mu > n$, so ist

$$\lim (z-a)^\mu \varphi(z) = \lim (z-a)^{\mu-n} (z-a)^n \varphi(z) = 0,$$

ist aber $\mu < n$, so ist

$$\lim (z-a)^\mu \varphi(z) = \lim \frac{(z-a)^n \varphi(z)}{(z-a)^{n-\mu}} = \infty .$$

Folglich kann $\varphi(z)$ nicht von einer gebrochenen Ordnung unendlich werden, und wir erhalten den Satz: Wenn eine einwerthige Function überhaupt von einer endlichen Ordnung unendlich wird, so kann sie nur von einer ganzen Ordnung unendlich werden.

Der Ausdruck (18) für $A$, welcher den Theil der Function $\varphi(z)$ darstellt, der allein für $z = a$ unendlich wird, hätte auch aus der in § 26 (15) entwickelten Reihe $A_k$ abgeleitet werden können. Lässt man dort den Index $k$ fort und berücksichtigt den hier vorliegenden Fall, dass $(z-a)^n \varphi(z)$ sich einem endlichen und von Null verschiedenen Grenzwerthe nähert, also $\lim (z-a)^{n+1} \varphi(z) = 0$ ist, so wird nach (16) § 26

$$c^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (z-a)^{n+1} \varphi(z) \, d\vartheta = 0,$$

wenn man den Kreis um $a$, auf den sich die Integration bezieht, in's Unendliche abnehmen lässt. Daher verschwinden um so mehr $c^{(n+2)}$, $c^{(n+3)}$, etc., und folglich bricht die Reihe $A_k$ bei dem

Gliede $\frac{c^{(n)}}{(t-a)^n}$ ab, und wird mit unserem Ausdrucke (18) identisch.

Hieraus folgt, dass wenn die Function $\varphi(z)$ nicht mehr von einer endlichen Ordnung unendlich wird, wenn es also keinen endlichen Exponenten $n$ giebt, für den $(z-a)^n \varphi(z)$ sich einem endlichen Grenzwerthe nähert, dann an die Stelle des Ausdrucks $A$ die unendliche Reihe $A_k$ tritt, weil dann keiner ihrer Coefficienten mehr verschwindet.

Kehren wir nun noch einmal zu der Gleichung (18a)

$$\varphi(z) = A + \psi(z)$$

zurück, so zeigt diese, dass eine einwerthige Function $\varphi(z)$, welche an einer Stelle $z=a$ unendlich gross wird, sich an dieser Stelle von einer dort endlich bleibenden Function $\psi(z)$ stets nur um einen Ausdruck von der Form $A$ unterscheidet. Sie wird daher nur so unendlich wie dieser Ausdruck $A$. Ist z. B. $\varphi(z)$ für $z=a$ von der ersten Ordnung unendlich, sodass $\lim (z-a)\varphi(z)$ endlich und von Null verschieden ist, so kann man auch sagen, $\varphi(z)$ wird dort unendlich wie $\frac{c'}{z-a}$. Oder ist $\varphi(z)$ für $z=a$ unendlich von der zweiten Ordnung, so ist es entweder unendlich wie $\frac{c'}{z-a}+\frac{c''}{(z-a)^2}$ oder nur wie $\frac{c''}{(z-a)^2}$ allein. Hat man eine andere einwerthige Function $f(z)$, welche für $z=a$ ebenfalls von der $n$ten Ordnung unendlich wird, so kann diese auch nur so unendlich werden, wie ein ähnlicher Ausdruck $A$, der sich von dem vorigen nur in den Werthen der Coefficienten $c$ unterscheiden kann. Ist die letztere Function $f(z)$ gegeben, so sind damit auch die Coefficienten $c$ gegeben, und folglich ist $\varphi(z)$ an einer Unstetigkeitsstelle $a$ bekannt, wenn eine Function $f(z)$ gegeben ist, die an dieser Stelle ebenso unendlich wird, wie $\varphi(z)$ es werden soll. Man kann alsdann setzen

$$\varphi(z) = f(z) + \psi(z),$$

worin $\psi(z)$ für $z=a$ endlich und stetig bleibt.

Aus der Gleichung $\varphi(z) = A + \psi(z)$ folgt durch Differentiation

$$\varphi'(z) = \frac{dA}{dz} + \psi'(z),$$

wo

$$\frac{dA}{dz} = -\frac{c'}{(z-a)^2} - \frac{2c''}{(z-a)^3} - \frac{3c'''}{(z-a)^4} - \cdots - \frac{n \cdot c^{(n)}}{(z-a)^{n+1}}.$$

Da nun (nach § 24) $\psi'(z)$ für $z=a$ endlich bleibt, weil $\psi(z)$ hier endlich ist, so folgt, dass die Derivirte $\varphi'(z)$ einer einwerthigen Function $\varphi(z)$ an einer Stelle $z=a$, wo

$\varphi(z)$ **unendlich ist, ebenfalls unendlich wird, und zwar von einer um Eins höheren Ordnung wie** $\varphi(z)$. In allen endlichen Punkten, in denen $\varphi(z)$ endlich ist, bleibt dagegen (nach § 24) auch $\varphi'(z)$ endlich, und daher **sind die endlichen Unstetigkeitspunkte einer einwerthigen Function** $\varphi(z)$ **mit denen ihrer Derivirten** $\varphi'(z)$ **identisch.**

Es wird sich später*) rechtfertigen lassen, dass man ein Unendlichwerden von der $n$ten Ordnung auch als ein Zusammenfallen von $n$ Punkten ansehen kann, in denen die Function $\varphi(z)$ unendlich von der ersten Ordnung ist. Indem wir von dieser Auffassung schon jetzt Gebrauch machen, werden wir, wenn eine Function an einer Stelle unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird, uns auch des Ausdrucks bedienen, dass sie dort $n$ **Mal unendlich** werde.

## § 30.

Wir gehen nun zu der Untersuchung über, wie sich eine einwerthige Function $\varphi(z)$ für einen unendlich grossen Werth der Variablen $z$ verhält. Diese Betrachtung können wir auf die vorige zurückführen, indem wir $z = \frac{1}{u}$ setzen, wodurch $\varphi(z)$ in $f(u)$ übergehen möge, und dann $f(u)$ an der Stelle $u = 0$ untersuchen. Nun ist zuerst (nach § 27a) $f(u)$ für $u = 0$ endlich, wenn $[\lim uf(u)]_{u=0} = 0$ ist. Also ist

$$\varphi(z) \text{ für } z = \infty \textbf{ endlich, wenn } \left[\lim \frac{\varphi(z)}{z}\right]_{z=\infty} = 0$$

ist. Ferner wird (nach § 29) $f(u)$ für $u = 0$ von der $n$ten Ordnung oder $n$ Mal unendlich, wenn $[\lim u^n f(u)]_{u=0}$ weder Null noch unendlich ist. Daher wird

$\varphi(z)$ **für** $z = \infty$ **unendlich von der** $n$**ten Ordnung, wenn**

$$\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}\right]_{z=\infty}$$

**weder Null noch unendlich**

ist. Man kann ferner nach § 29 in diesem Falle setzen:

$$f(u) = \frac{Q'}{u} + \frac{Q''}{u^2} + \frac{Q'''}{u^3} + \cdots + \frac{Q^{(n)}}{u^n} + \lambda(u),$$

wo $\lambda(u)$ eine für $u = 0$ endlich bleibende Function, und die

*) Siehe unten § 34.

Grössen $Q$ constante Coefficienten bedeuten. Geht $\lambda(u)$, durch $z$ ausgedrückt, in $\psi(z)$ über, so erhält man hieraus

(19) $$\varphi(z) = Q'z + Q''z^2 + Q'''z^3 + \cdots + Q^{(n)}z^n + \psi(z),$$

worin $\psi(z)$ für $z = \infty$ endlich bleibt. In diesem Falle ist also $\varphi(z)$ unendlich wie eine ganze Function von $z$.

Aus dieser Gleichung (19) folgt

(20) $$\varphi'(z) = Q' + 2Q''z + 3Q'''z^2 + \cdots + nQ^{(n)}z^{n-1} + \psi'(z).$$

Um nun zuerst zu untersuchen, wie sich die Derivirte $\psi'(z)$ der endlich bleibenden Function $\psi(z)$ im Unendlichen verhält, kehren wir wieder zu der Variablen $u$ zurück. Da

$$\frac{du}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -u^2$$

ist, und

$$\psi(z) = \lambda(u)$$

war, so ist

$$\psi'(z) = -u^2\lambda'(u).$$

Nun ist $\lambda(u)$ endlich für $u = 0$, also nach § 24 auch $\lambda'(u)$, und folglich wird

$$\psi'(z) = 0 \text{ für } z = \infty.$$

W e n n a l s o e i n e e i n w e r t h i g e F u n c t i o n i m P u n k t e $z = \infty$ e n d l i c h i s t, s o i s t i h r e D e r i v i r t e i n d i e s e m P u n k t e g l e i c h N u l l.*)

Alsdann folgt aus (20), dass $\varphi'(z)$ für $z = \infty$ von einer um Eins niedrigeren Ordnung unendlich gross wird, als $\varphi(z)$. Ist also $\varphi(z)$ nur von der ersten Ordnung unendlich gross, so bleibt $\varphi'(z)$ endlich für $z = \infty$.

Die ganze Function in (19) bildet einen Theil der § 26 (15) abgeleiteten Reihe $I$. Diese wird nämlich zu einer endlichen, wenn

$$\lim \frac{\varphi(z)}{z^n} \text{ endlich, also } \lim \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}} = 0$$

ist. Denn lässt man in dem Integral [§ 26 (16)]

$$Q^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^{n+1}}\, d\vartheta$$

den Integrationskreis $(I)$ in's Unendliche wachsen, so convergirt es gegen Null; es verschwinden daher um so mehr $Q^{(n+2)}$, $Q^{(n+3)}$, etc., und die Reihe $I$ bricht bei dem Gliede $Q^{(n)}z^n$ ab. Wenn es

*) Und zwar mindestens von der zweiten Ordnung. (Vgl. § 34.)

dagegen keinen endlichen Exponenten $n$ giebt, für den $\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}$ endlich ist, so wird $\varphi(z)$ unendlich, wie eine nach ganzen Potenzen von $z$ fortschreitende unendliche Reihe.

## § 31.

Aus dem Vorigen ergeben sich nun folgende Sätze: Wenn eine einwerthige Function für keinen endlichen Werth von $z$, sondern nur für $z = \infty$, und auch hier nur von endlicher Ordnung ($n$ Mal) unendlich wird, so ist sie eine ganze Function $n$ten Grades. Denn man hat in diesem Falle

$$\varphi(z) = Q'z + Q''z^2 + Q'''z^3 + \cdots + Q^{(n)}z^n + \psi(z);$$

da nun aber $\psi(z)$ eine einwerthige Function ist, welche weder für einen endlichen noch für einen unendlichen Werth von $z$ unendlich gross wird, so ist sie nach § 28 eine Constante. Bezeichnet man dieselbe mit $Q$, so folgt

$$\varphi(z) = Q + Q'z + Q''z^2 + Q'''z^3 + \cdots + Q^{(n)}z^n,$$

also ist in der That $\varphi(z)$ eine ganze Function $n$ten Grades. Umgekehrt wird auch eine ganze Function $n$ten Grades $\varphi(z)$ nur für $z = \infty$ und hier $n$ Mal unendlich; denn es ist

$$\left[\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}\right]_{z=\infty} = Q^{(n)},$$

also endlich, und zugleich von Null verschieden, wenn $\varphi(z)$ nicht von niedrigerem Grade ist, als vom $n$ten.

Wird eine einwerthige Function $\varphi(z)$ nur für $z = \infty$ unendlich gross, aber von unendlich hoher Ordnung, so lässt sie sich nach Potenzen von $z$ in eine für jeden Werth von $z$ convergirende Reihe entwickeln. Denn die Reihe $I$ convergirt für jeden Punkt innerhalb des Kreises ($I$) (vgl. § 26), wenn in demselben keine Unstetigkeitspunkte liegen, und dieser Kreis kann beliebig erweitert werden, wenn $\varphi(z)$ für keinen endlichen Werth von $z$ unendlich wird. Daher unterscheidet sich $\varphi(z)$ von einer für alle Werthe von $z$ convergirenden Reihe nur um eine einwerthige Function $\psi(z)$, welche für $z = \infty$ nicht, und daher überhaupt nicht unendlich wird, und die folglich eine Constante ist.

## § 32.

**Wenn eine einwerthige Function nur für eine endliche Anzahl von Werthen der Variablen und für jeden nur von endlicher Ordnung unendlich gross wird, (kurz, wenn sie nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird), so ist sie eine rationale Function.**

Seien $a, b, c, \dots k, l, \infty$ die Werthe von $z$, für welche $\varphi(z)$ unendlich wird, $\alpha, \beta, \gamma, \dots \varkappa, \lambda, \mu$ die resp. Ordnungszahlen des Unendlichwerdens; so kann man zuerst setzen

$$\varphi(z) = Q'z + Q''z^2 + \dots + Q^{(\mu)}z^\mu + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = \infty$ nicht, also nur noch für $z = a, b, \dots l$ unendlich wird; demnach hat man

$$\psi(z) = \frac{c_1'}{z-a} + \frac{c_1''}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_1^{(\alpha)}}{(z-a)^\alpha} + \psi_1(z),$$

wo nun $\psi_1(z)$ nur noch für $b, c, \dots l$ unendlich ist. Man hat also weiter

$$\psi_1(z) = \frac{c_2'}{z-b} + \frac{c_2''}{(z-b)^2} + \dots + \frac{c_2^{(\beta)}}{(z-b)^\beta} + \psi_2(z).$$

Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man zu

$$\psi_{n-1}(z) = \frac{c_n'}{z-l} + \frac{c_n''}{(z-l)^2} + \dots + \frac{c_n^{(\lambda)}}{(z-l)^\lambda} + \psi_n(z),$$

wo $\psi_n(z)$ gar nicht mehr unendlich wird, also eine Constante ist. Bezeichnet man diese mit $Q$, so erhält man, indem man die obigen Ausdrücke zusammensetzt,

$$\begin{aligned}\varphi(z) = Q &+ Q'z + Q''z^2 + \dots + Q^{(\mu)}z^\mu \\ &+ \frac{c_1'}{z-a} + \frac{c_1''}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_1^{(\alpha)}}{(z-a)^\alpha} \\ &+ \frac{c_2'}{z-b} + \frac{c_2''}{(z-b)^2} + \dots + \frac{c_2^{(\beta)}}{(z-b)^\beta} \\ &+ \dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{c_n'}{z-l} + \frac{c_n''}{(z-l)^2} + \dots + \frac{c_n^{(\lambda)}}{(z-l)^\lambda},\end{aligned}$$

also in der That eine rationale Function.

## § 33.

Eine einwerthige Function $\varphi(z)$ ist bis auf eine additive Constante bestimmt, sobald für jeden Unstetigkeitspunkt eine Function gegeben ist, welche übrigens endlich und stetig bleibt, aber an der betreffenden Unstetigkeitsstelle ebenso unendlich wird, wie $\varphi(z)$ es werden soll. Seien $a_1$, $a_2$, $a_3$, etc. die Unstetigkeitspunkte von $\varphi(z)$, und denken wir uns darunter den Werth $\infty$ gleich mit begriffen. Ferner seien $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, etc. gegebene Functionen, welche überall endlich und stetig sind, nur resp. in den Punkten $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ unendlich gross werden. Wenn dann $\varphi(z)$ in $a_1$ so unendlich werden soll wie $f_1(z)$, so kann man setzen

$$\varphi(z) = f_1(z) + \psi(z).$$

wo $\psi(z)$ für $z = a_1$ nicht unendlich wird. Da nun $f_1(z)$ für $z = a_2$ endlich ist, so muss $\psi(z)$ hier unendlich werden, und zwar so wie $\varphi(z)$. Soll daher $\varphi(z)$ in $a_2$ so unendlich werden, wie $f_2(z)$, so kann man setzen

$$\psi(z) = f_2(z) + \psi_1(z),$$

wo nun $\psi_1(z)$ nicht für $a_1$ und $a_2$, sondern nur noch für $a_3$, etc. unendlich wird. Fährt man so fort, so gelangt man endlich zu einer Function $\psi$, die gar nicht mehr unendlich wird, also eine Constante ist. Wird diese mit $C$ bezeichnet, so erhält man

$$\varphi(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \cdots + C.$$

## § 34.

Man sagt, eine einwerthige Function $\varphi(z)$ wird für einen Werth von $z$ unendlich klein oder Null von der $n$ten Ordnung, wenn $\frac{1}{\varphi(z)}$ für diesen Werth unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird. Für diesen Fall ist nach § 29 und 30

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } z = a & \lim \dfrac{(z-a)^n}{\varphi(z)} \\ \;\;\text{„}\;\; z = \infty & \lim \dfrac{1}{z^n\,\varphi(z)} \end{array}\right\} \text{ weder Null noch unendlich gross.}$$

Da nun auch die umgekehrten Brüche endliche und von Null verschiedene Grenzwerthe haben müssen, so haben wir als Bedingungen dafür, dass $\varphi(z)$ für $z = \infty$ oder für einen endlichen Werth $z = a$ unendlich klein oder Null von der $n$ten Ordnung ist:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } z = a & \lim \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^n} \\ \text{„ } z = \infty & \lim z^n \varphi(z) \end{array}\right\} \text{ weder Null noch unendlich gross.}$$

Diese Bedingungen entstehen aus denen des unendlich gross Werdens, wenn $-n$ an die Stelle von $n$ tritt, und daher kann man auch ein unendlich klein Werden als ein unendlich gross Werden von negativer Ordnung betrachten oder auch umgekehrt.

Wird $\varphi(z)$ für $z = a$ Null von der $n$ten Ordnung, und setzt man

$$\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} = \psi(z),$$

so ist nach dem Obigen $\psi(z)$ eine Function, welche für $z = a$ endlich und von Null verschieden ist. Hieraus folgt, dass man

$$\varphi(z) = (z - a)^n \psi(z)$$

setzen, also aus $\varphi(z)$ den Factor $(z - a)^n$ herausziehen kann. Setzt man $-n$ an die Stelle von $n$, so gilt dasselbe auch, wenn $\varphi(z)$ für $z = a$ unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird. Dann kann man setzen

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^n}.$$

Hiedurch rechtfertigt sich die oben (§ 29) ausgeführte Auffassungsweise, nach welcher ein unendlich Werden von der $n$ten Ordnung als $n$-maliges unendlich Werden von der ersten Ordnung betrachtet werden kann. Denn ist z. B. $\varphi(z)$ für zwei Punkte $z = a$ und $z = b$ unendlich klein von der ersten Ordnung, so ist zuerst

$$\varphi(z) = (z - a)\,\psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich bleibt und für $z = b$ unendlich klein werden muss. Daher ist dann

$$\psi(z) = (z - b)\,\psi_1(z) \text{ und } \varphi(z) = (z - a)(z - b)\,\psi_1(z),$$

wo $\psi_1(z)$ sowohl für $z = a$ als auch für $z = b$ endlich bleibt. Fallen nun die Punkte $b$ und $a$ zusammen, so entsteht

$$\varphi(z) = (z - a)^2 \psi_1(z),$$

und daher ist dann $\varphi(z)$ für $z = a$ von der 2ten Ordnung unendlich klein. Beim unendlich gross Werden verhält sich die Sache ebenso.

Wird $\varphi(z)$ für $z = \infty$ unendlich klein von der $n$ten Ordnung, so ist

$$z^n \varphi(z) = \psi(z)$$

für $z = \infty$ endlich und von Null verschieden, und diese Gleichung gilt auch zugleich für das unendlich gross Werden, wenn $-n$ an

Stelle von $n$ gesetzt wird. Daher kann man in diesem Falle beim unendlich klein Werden von $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z)}{z^n}$$

und beim unendlich gross Werden

$$\varphi(z) = z^n \psi(z)$$

setzen, wo $\psi(z)$ eine für $z = \infty$ endlich und von Null verschieden bleibende Function bedeutet.

## § 35.

Hieran knüpft sich die Untersuchung, wie oft eine einwerthige Function in einem Gebiete unendlich klein oder gross von der ersten Ordnung wird, wobei ein unendlich Werden von der $n$ten Ordnung als $n$-maliges unendlich Werden von der ersten Ordnung aufgefasst wird. Diese Anzahl kann nämlich durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden.*) Innerhalb eines Gebietes $T$ werde die einwerthige Function $\varphi(z)$ in den Punkten $a_1$, $a_2$, $a_3$, etc. unendlich klein oder gross, und zwar resp. von den Ordnungen $n_1$, $n_2$, $n_3$, etc., die für ein unendlich klein Werden positiv, für ein unendlich gross Werden negativ zu nehmen seien. Wir betrachten nun das Integral

$$\int d \log \varphi(z) \quad \text{oder} \quad \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\, dz,$$

bezogen auf die ganze Begrenzung von $T$. Die Function $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ wird unendlich gross für alle Punkte, in denen $\varphi(z)$ Null, und für alle diejenigen, in denen $\varphi'(z)$ unendlich gross ist. Nach § 24 bleibt aber $\varphi'(z)$ endlich in allen Punkten, in denen $\varphi(z)$ endlich ist, und wird nach § 29 in allen denen unendlich, in denen $\varphi(z)$ es ist; daher sind die Unstetigkeitspunkte von $\varphi'(z)$ innerhalb $T$ identisch mit denen von $\varphi(z)$. Demnach wird $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ unendlich gross für die sämmtlichen Punkte $a_1$, $a_2$, $a_3$, etc., und nur für diese. Nach § 19 ist nun das obige auf die Begrenzung von $T$ bezogene Integral gleich der Summe der Integrale ausgedehnt auf kleine, um die Punkte $a$ beschriebene Kreise. Sei $A$ eines dieser Integrale entsprechend dem Punkte $a$, bei welchem die

*) Dies findet sich schon bei *Cauchy*. Comptes rendus Bd. 40. 1855. I. Mémoire sur les variations intégrales des fonctions. pag. 656.

Ordnung des unendlich Werdens gleich $n$ sei. Dann kann man nach § 34 setzen

$$\varphi(z) = (z-a)^n \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich und von Null verschieden bleibt. Hieraus folgt

$$A = \int d \log \varphi(z) = n \int \frac{dz}{z-a} + \int \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} dz,$$

die Integrale auf einen kleinen um $a$ beschriebenen Kreis ausgedehnt. Da nun innerhalb des Integrationskreises $\psi(z)$ nicht Null und $\psi'(z)$ nicht unendlich gross ist, so ist $\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ stetig und daher (§ 18)

$$\int \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} dz = 0.$$

Ausserdem ist (§ 20)

$$\int \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

und daher

$$A = 2\pi i n.$$

Summirt man diese Werthe $A$ für alle Punkte $a$, so erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i (n_1 + n_2 + n_3 + \cdots) = 2\pi i \Sigma n,$$

das Integral auf die Begrenzung von $T$ ausgedehnt, und hierin giebt $\Sigma n$ an, wie oft $\varphi(z)$ innerhalb $T$ unendlich gross oder klein von der ersten Ordnung wird, wenn man ein unendlich Werden $n$ter Ordnung als $n$-maliges unendlich Werden erster Ordnung ansieht. Wir haben also den Satz: Das Integral

(21)

$$\int d \log \varphi(z)$$

einer einwerthigen Function $\varphi(z)$, bezogen auf die Begrenzung eines Gebietes $T$, ist gleich $2\pi i$ Mal der Anzahl der Punkte, in denen $\varphi(z)$ innerhalb $T$ unendlich klein oder gross von der ersten Ordnung ist.

Bezieht man den Buchstaben $n$ auf das unendlich klein Werden und deutet die Ordnungszahlen des unendlich gross Werdens durch $-\nu$ an, da sie negativ zu nehmen sind, so erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = 2\pi i (\Sigma n - \Sigma \nu).$$

Wenn die Function $\varphi(z)$ innerhalb $T$ endlich bleibt, so fällt aus der vorigen Formel das Glied $-\Sigma\nu$ fort, und die Anzahl der Punkte, in denen eine einwerthige Function $\varphi(z)$ Null von der ersten Ordnung ist innerhalb eines Gebietes $T$, in welchem $\varphi(z)$ stetig bleibt, ist gleich

$$\frac{1}{2\pi i}\int d\log\varphi(z),$$

das Integral auf die Begrenzung von $T$ bezogen. (22)

## § 36.

Wenn man nun unter den Punkten $a$ alle endlichen Punkte versteht, in denen $\varphi(z)$ unendlich klein oder gross ist, so kommt es noch darauf an, wie sich $\varphi(z)$ für $z = \infty$ verhält. Nehmen wir an, $\varphi(z)$ werde für $z = \infty$ $m$ Mal unendlich, und zwar beziehe sich wieder ein positives $m$ auf das unendlich klein, ein negatives $m$ auf das unendlich gross, Werden. Nimmt man dann als Begrenzung von $T$ einen Kreis um den Nullpunkt, welcher die sämmtlichen Punkte $a$ umgiebt, so ist zunächst nach dem Vorigen auf diesen Kreis bezogen

$$\int d\log\varphi(z) = 2\pi i\,(\Sigma n - \Sigma\nu), \tag{23}$$

Führt man nun aber statt $z$ eine neue Variable $u$ durch die Beziehung

$$z = \frac{1}{u}$$

ein, so entspricht jedem Punkte $z$ ein Punkt $u$, und dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $u = 0$. Setzt man ferner

$$z = r\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

so wird

$$u = \frac{1}{r}\,(\cos\vartheta - i\sin\vartheta).$$

Beschreibt nun $z$ eine geschlossene Linie $Z$ um den Nullpunkt, so beschreibt $u$, weil dabei $\vartheta$ von 0 bis $2\pi$ wächst, ebenfalls eine geschlossene Linie $U$ um den Nullpunkt, aber in umgekehrter Richtung. Lässt man ferner bei constantem $\vartheta$ den Radius Vector $r$ wachsen, so nimmt $\frac{1}{r}$ ab und umgekehrt, folglich entsprechen allen Punkten $z$ ausserhalb $Z$ Punkte $u$, die innerhalb $U$ liegen. Führt man jetzt in dem Integrale

$$\int d \log \varphi(z) \text{ oder } \int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$$

$u$ statt $z$ ein, indem man die aus $\varphi(z)$ dadurch hervorgehende Function mit $f(u)$ bezeichnet, so erhält man

$$\int d \log f(u) \text{ oder } \int \frac{f'(u)}{f(u)} du.$$

In dem Integrale nach $z$ ist die Integrationscurve $Z$ ein alle Punkte $a$ umschliessender Kreis um den Nullpunkt, also ist in dem Integrale nach $u$ die Integrationscurve auch ein Kreis um den Nullpunkt, der aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Nimmt man daher bei beiden Integralen die Integration in der Richtung der wachsenden Winkel, so ist

$$\int d \log \varphi(z) = -\int d \log f(u),$$

das erste Integral auf den Kreis $Z$, das zweite auf den Kreis $U$ bezogen. Der Kreis $Z$ umgiebt alle Punkte $a$, also wird $\varphi(z)$ ausserhalb $Z$ nur unendlich für $z = \infty$, und daher $f(u)$ innerhalb $U$ nur unendlich für $u = 0$. Für $z = \infty$ war $\varphi(z)$ unendlich klein von der $m$ten Ordnung, sodass

$$\left[\lim z^m \varphi(z)\right]_{z=\infty} = \left[\lim \frac{f(u)}{u^m}\right]_{u=0}$$

endlich und von Null verschieden ist; demnach ist auch $f(u)$ für $u = 0$ unendlich klein von der $m$ten Ordnung, und setzt man

$$f(u) = u^m \psi(u),$$

so bedeutet $\psi(u)$ eine Function, welche in $u = 0$, also überall innerhalb $U$ endlich und von Null verschieden ist. Nun folgt wieder

$$\int d \log f(u) = m \int \frac{du}{u} + \int \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} du,$$

worin das zweite Integral verschwindet, und das erste, in der Richtung der wachsenden Winkel genommen, $= 2\pi i m$ ist. Demnach erhält man

$$\int d \log \varphi(z) = -\int d \log f(u) = -2\pi i . m.$$

Vergleicht man dies Resultat mit dem unter (23) gefundenen Werthe dieses auf dieselbe Curve bezogenen Integrales, so ergiebt sich

(24) $$\Sigma n - \Sigma \nu = -m.$$

Ist nun $\varphi(z)$ für $z = \infty$ Null, so ist $m$ positiv, und man erhält

$$m + \Sigma n = \Sigma \nu;$$

ist aber $\varphi(z)$ für $z = \infty$ unendlich gross, so ist $m$ negativ; schreibt man $-\mu$ dafür, so folgt

$$\Sigma n = \mu + \Sigma \nu.$$

In beiden Gleichungen giebt dann die linke Seite an, wie oft $\varphi(z)$ in der ganzen unendlichen Ebene Null von der ersten Ordnung, und die rechte Seite, wie oft diese Function unendlich gross von der ersten Ordnung wird, und wir erhalten den Satz: Eine einwerthige Function wird in der ganzen unendlichen Ebene ebenso oft Null wie unendlich gross. Daraus folgt sogleich: eine einwerthige Function nimmt jeden beliebigen Werth $k$ ebenso oft an, als sie unendlich gross wird. Denn $\varphi(z) - k$ wird ebenso unendlich gross wie $\varphi(z)$, daher wird $\varphi(z) - k$ ebenso oft Null, als $\varphi(z)$ unendlich gross wird, und folglich $\varphi(z)$ ebenso oft gleich $k$.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Fundamentalsatz der Algebra, denn eine ganze Function $n$ten Grades wird nur für $z = \infty$ unendlich gross und zwar $n$ Mal, folglich muss sie auch $n$ Mal Null werden, und daher muss eine Gleichung $n$ten Grades $n$ Wurzeln haben.

## § 37.

Man kann nun den schon im § 32 bewiesenen Satz, dass eine einwerthige Function, welche nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich gross wird, eine rationale Function sein muss, auf's Neue und in einer anderen Form beweisen.

Seien $a_1$, $a_2$, $a_3$, etc. die endlichen Werthe von $z$, für welche die einwerthige Function $\varphi(z)$ unendlich klein oder gross wird, und mögen resp. $n_1$, $n_2$, $n_3$, etc. die Ordnungszahlen des Unendlichwerdens bedeuten, positiv beim unendlich klein, negativ beim unendlich gross Werden. Dann kann man zuerst nach § 34

$$\varphi(z) = (z - a_1)^{n_1} \psi(z)$$

setzen, wo $\psi(z)$ für $z = a_1$ endlich und von Null verschieden ist, aber für $z = a_2$, $a_3$, etc. unendlich wird. Alsdann ist

$$\psi(z) = (z - a_2)^{n_2} \psi_1(z),$$

wo nun

$$\psi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a_1)^{n_1} (z-a_2)^{n_2}}$$

für $a_1$ und $a_2$ nicht, wohl aber für $a_3$, etc. unendlich wird; fährt man so fort, so gelangt man zu einer Function

$$\lambda(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a_1)^{n_1}(z-a_2)^{n_2}(z-a_3)^{n_3}\ldots\ldots} = \frac{\varphi(z)}{\Pi(z-a)^n},$$

welche für keinen endlichen Werth von $z$ mehr unendlich wird. Von dieser kann nun aber gezeigt werden, dass sie auch für $z = \infty$ nicht unendlich gross werden kann. Da nämlich

$$(z-a)^n = z^n\left(1-\frac{a}{z}\right)^n$$

ist, so kann man schreiben

$$\Pi(z-a)^n = z^{\Sigma n}\,\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n.$$

Bezeichnet aber $m$ die Anzahl, wie oft $\varphi(z)$ für $z = \infty$ unendlich wird, positiv beim unendlich klein, negativ beim unendlich gross Werden, so ist (§ 36 (24))

$$\Sigma n = -m,$$

da hier $\Sigma n$ dasselbe bedeutet, was dort mit $\Sigma n - \Sigma \nu$ bezeichnet worden ist. Demnach hat man

$$\Pi(z-a)^n = z^{-m}\,\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n$$

und

$$\lambda(z) = \frac{z^m\varphi(z)}{\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n}.$$

Für $z = \infty$ aber ist

$$\lim \frac{z^m\varphi(z)}{\Pi\left(1-\frac{a}{z}\right)^n} = \lim z^m\varphi(z),$$

und dies ist nach § 34 endlich und von Null verschieden, da $\varphi(z)$ für $z = \infty$ von der $m$ten Ordnung unendlich klein wird. Folglich ist $\lambda(z)$ in der That eine Function, welche für $z = \infty$ endlich bleibt; da sie nun auch für keinen endlichen Werth von $z$ unendlich gross wird, so muss sie nach § 28 eine Constante sein. Bezeichnet man diese mit $C$, so ist

$$\varphi(z) = C\Pi(z-a)^n.$$

Behält man nun $a_1, a_2, a_3$, etc. für die endlichen Werthe von $z$ bei, für welche $\varphi(z)$ verschwindet, resp. von den Ordnungen $n_1$, $n_2$, $n_3$, etc.; und bezeichnet mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, etc. die endlichen Werthe, für welche $\varphi(z)$ unendlich gross wird, resp. von den Ordnungen $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$, etc., so ist

$$\varphi(z) = C\frac{(z-a_1)^{n_1}(z-a_2)^{n_2}(z-a_3)^{n_3}\ldots\ldots}{(z-\alpha_1)^{\nu_1}(z-\alpha_2)^{\nu_2}(z-\alpha_3)^{\nu_3}\ldots\ldots}$$

Demnach ist $\varphi(z)$ wirklich eine rationale Function, und zwar erscheint sie hier im Zähler und Nenner in Factoren aufgelöst, während sie in § 32 in Partialbrüche und eine ganze Function zerlegt war.

Hieraus folgt ferner: Eine einwerthige Function ist bis auf einen constanten Factor bestimmt, sobald man alle endlichen Werthe kennt, für welche sie unendlich klein und unendlich gross wird, und von jedem auch die Ordnungszahl des Unendlichwerdens, und: Zwei einwerthige Functionen, welche in diesen Werthen und in den Ordnungszahlen übereinstimmen, sind bis auf einen constanten Factor einander gleich.

## B. Functionen mit Verzweigungspunkten.

### § 38.

Indem wir nun zur Betrachtung von Functionen übergehen, welche Verzweigungspunkte besitzen, schliessen wir auch hier alle nicht polaren Unstetigkeiten aus und erinnern an die im Eingange dieses Abschnittes gemachte Bemerkung, deren Richtigkeit sich aus der Art, wie die vorigen Untersuchungen geführt worden sind, ergiebt, dass alle von einwerthigen Functionen geltenden Eigenschaften, die sich nur auf endliche Flächentheile beziehen, auch für eine beliebige Function gültig bleiben, so lange dieselbe in dem zu betrachtenden Flächentheile einwerthig ist, d. h. darin keine Verzweigungspunkte besitzt und nirgend eine nicht polare Unstetigkeit erleidet. Wir haben daher hier nur noch die Verzweigungspunkte selbst näher zu betrachten und knüpfen an die in § 21 angestellte Untersuchung an, welche Folgendes ergeben hat: Ist $z = b$ ein Verzweigungspunkt einer Function $f(z)$, in welchem $m$ Blätter der $z$-Fläche zusammenhängen (ein Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung (§ 13)), und setzt man

$$(z-b)^{\frac{1}{m}} = \zeta,$$

wodurch $f(z)$ in $\varphi(\zeta)$ übergehe, so hat $\varphi(\zeta)$ an der $z = b$ entsprechenden Stelle $\zeta = 0$ keinen Verzweigungspunkt.

Man kann nun zuerst die Betrachtung des § 27a auf ein den Punkt $\zeta = 0$ umgebendes Gebiet anwenden, da man dasselbe immer

so klein wählen kann, dass es keinen Verzweigungspunkt enthält. Dann bleibt $\varphi(\zeta)$ an der Stelle $\zeta = 0$ endlich, wenn

$$\Big[\lim \zeta\varphi(\zeta)\Big]_{\zeta = 0} = 0$$

ist; folglich erhalten wir als die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(z)$ in dem Verzweigungspunkte $z = b$ endlich bleibe:

$$\Big[\lim (z - b)^{\frac{1}{m}} f(z)\Big]_{z = b} = 0.$$

Ferner ergeben die Betrachtungen des § 29, dass wenn $\varphi(\zeta)$ in dem Punkte $\zeta = 0$ unendlich gross von der $n$ten Ordnung wird, man setzen kann

$$\varphi(\zeta) = \frac{g'}{\zeta} + \frac{g''}{\zeta^2} + \frac{g'''}{\zeta^3} + \cdots + \frac{g^{(n)}}{\zeta^n} + \lambda(\zeta),$$

wo $\lambda(\zeta)$ für $\zeta = 0$ endlich bleibt, und die Grössen $g$ constante Coefficienten bedeuten. Demnach hat man, wenn nun $f(z)$ in dem Verzweigungspunkte $z = b$ unendlich gross wird,

$$f(z) = \frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}} + \frac{g'''}{(z-b)^{\frac{3}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(n)}}{(z-b)^{\frac{n}{m}}} + \psi(z),$$

wo $\psi(z) = \lambda(\zeta)$ sei, und für $z = b$ endlich bleibe. Dann ist

$\lim (z - b)^{\frac{n}{m}} f(z)$ endlich und von Null verschieden,

und man bezeichnet die Ordnung des Unendlichwerdens von $f(z)$ durch den Bruch $\frac{n}{m}$.

In $b$ hängen $m$ Blätter der $z$-Fläche zusammen, daher fallen hier auch $m$ Functionswerthe auf einander. Jeder derselben, der mit $w$ bezeichnet werden möge, wird so unendlich, dass

$$\lim w\,(z - b)^{\frac{n}{m}}$$

endlich und von Null verschieden bleibt. Demnach ist auch

$$\lim w^{m}\,(z - b)^{n}$$

weder Null noch unendlich, und daher kann man auch sagen: die Function $w$ wird in $b$, wo $m$ Blätter zusammenhängen, $n$ Mal unendlich, wenn jeder der hier zusammenfallenden Werthe von der Ordnung $\frac{n}{m}$ unendlich wird.

Genauer bestimmt man die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$, indem man den Ausdruck angiebt, um welchen sich $f(z)$ in $b$ von einer dort endlich bleibenden Function unterscheidet. Dieser

Ausdruck schreitet, wie die letzte Gleichung zeigt, nach ganzen Potenzen von $(z-b)^{-\frac{1}{m}}$ fort. Man sagt also z. B. $f(z)$ wird unendlich, wie $\frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}$, oder wie $\frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}}$, oder wie $\frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}}+\frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}}$, u. s. w.

Betrachten wir nun noch den Werth $z=\infty$, welcher, wie wir schon § 14 gesehen haben, durch einen bestimmten Punkt repräsentirt werden und dann auch als Verzweigungspunkt auftreten kann. Man setze

$$z=\frac{1}{u} \text{ und } f(z)=\varphi(u);$$

dann ist $u=0$ ein Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung für $\varphi(u)$, wenn $z=\infty$ ein solcher für $f(z)$ ist. Demnach kann man setzen

$$\varphi(u)=\frac{g'}{u^{\frac{1}{m}}}+\frac{g''}{u^{\frac{2}{m}}}+\cdots+\frac{g^{(n)}}{u^{\frac{n}{m}}}+\lambda(u)$$

oder

$$f(z)=g'z^{\frac{1}{m}}+g''z^{\frac{2}{m}}+\cdots+g^{(n)}z^{\frac{n}{m}}+\psi(z), \tag{25}$$

wo $\psi(z)=\lambda(u)$ für $z=\infty$ endlich bleibt. Folglich ist $f(z)$ für $z=\infty$ endlich, wenn

$$\lim\left[\frac{f(z)}{z^{\frac{1}{m}}}\right]_{z=\infty}=0$$

ist; und wenn in $z=\infty$ $m$ Werthe der Function zusammenfallen, von denen jeder von der Ordnung $\frac{n}{m}$ unendlich gross wird, was der Fall ist, wenn

$$\lim\left[\frac{f(z)}{z^{\frac{n}{m}}}\right]_{z=\infty} \text{ endlich und von Null verschieden}$$

ist, so sagt man, $f(z)$ wird in $z=\infty$ $n$ Mal unendlich.

## § 39.

Wir müssen nun auch das Verhalten der derivirten Function $\frac{dw}{dz}$ ($f(z)=w$ gesetzt) in einem Verzweigungspunkte näher in's Auge fassen. Zuerst betrachten wir nur solche endliche Punkte,

in denen $w$ endlich bleibt. Im § 24 ist gezeigt worden, dass wenn $w$ in einem Gebiete endlich, stetig und einändrig ist, also weder Unstetigkeitspunkte noch Verzweigungspunkte besitzt, $\frac{dw}{dz}$ in demselben Gebiete ebenfalls endlich und stetig bleibt. Drückt man nun die Derivirte durch den Grenzwerth, dem sie gleich ist, aus, indem man den für $z = a$ stattfindenden Werth von $w$ mit $w_a$ bezeichnet, so hat man

$$\frac{dw}{dz} = \lim \frac{w - w_a}{z - a},$$

und kann demgemäss sagen: wenn $z = a$ weder ein Unstetigkeitspunkt noch ein Verzweigungspunkt von $w$ ist, so ist

$$\lim \frac{w - w_a}{z - a} \text{ nicht unendlich gross.}$$

Man kann aber auch entscheiden, unter welcher Bedingung dieser Grenzwerth von Null verschieden bleibt. Dazu braucht man nur $z$ als Function von $w$ zu betrachten. Wenn nämlich der dem Punkte $z = a$ entsprechende Punkt $w = w_a$ kein Verzweigungspunkt der Function $z$ ist, so ist nach dem Obigen

$$\lim \frac{z - a}{w - w_a} \text{ nicht unendlich gross,}$$

und daher der umgekehrte Bruch

$$\lim \frac{w - w_a}{z - a} \text{ nicht Null.}$$

Wir erhalten also zuerst folgenden Satz, der als Grundlage für das Folgende dient: Sind $z = a$ und $w = w_a$ zwei einander entsprechende endliche Punkte, und ist weder $z = a$ ein Verzweigungspunkt von $w$, noch $w = w_a$ ein Verzweigungspunkt von $z$, so ist

$$\lim \frac{w - w_a}{z - a} \text{ endlich und nicht Null.}$$

Daraus folgt, dass die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ in einem endlichen Punkte (in dem auch $w$ endlich ist) nur dann Null oder unendlich gross werden kann, wenn darin entweder für $w$, als Function von $z$, oder für $z$, als Function von $w$ betrachtet, eine Verzweigung eintritt.

Tritt nun an die Stelle von $a$ ein Verzweigungspunkt $b$, in welchem aber $w$ einen endlichen Werth $w_b$ hat, so setze man, wenn die $z$-Fläche sich $m$-Mal um $b$ windet (nach § 21),

$$(z - b)^{\frac{1}{m}} = \zeta;$$

dann hat $w$ als Function von $\zeta$ betrachtet, an der Stelle $\zeta = 0$ weder einen Unstetigkeitspunkt noch einen Verzweigungspunkt. Nehmen wir nun den Fall an, dass auch $\zeta$, als Function von $w$ betrachtet, an der Stelle $w = w_b$ keinen Verzweigungspunkt besitzt, so sind die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt, und daher ist

$$\lim \frac{w - w_b}{\zeta} \text{ oder } \lim \frac{w - w_b}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} \text{ weder Null noch unendlich.}$$

Nun ist aber

$$z - b = \zeta^m,$$

also $z$ eine rationale Function von $\zeta$, und folglich nach § 15 eine ebenso verzweigte Function von $w$, wie $\zeta$. Wenn daher $\zeta$ an der Stelle $w = w_b$ keinen Verzweigungspunkt besitzt, so hat $z$, als Function von $w$ betrachtet, dort ebenfalls keinen solchen, und daher erhalten wir folgenden Satz: Hat $w$ in $z = b$ einen Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung, $z$ aber, als Function von $w$ betrachtet, in $w = w_b$ keinen Verzweigungspunkt, so ist

$$\lim \frac{w - w_b}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und von Null verschieden.} \tag{26}$$

Bezeichnet man diesen endlichen Grenzwerth mit $k$, so ist nun auch

$$\lim \frac{(w - w_b)^m}{z-b} = k^m;$$

es war aber

$$\lim \frac{w - w_b}{z - b} = \frac{dw}{dz},$$

also ist

$$\frac{dw}{dz} = \lim \frac{k^m}{(w - w_b)^{m-1}} = \lim \frac{k}{(z-b)^{\frac{m-1}{m}}}$$

Unter der Voraussetzung des Satzes (26) wird also $\frac{dw}{dz}$ in $b$ unendlich gross, und zwar so, dass

$$\lim (w - w_b)^{m-1} \frac{dw}{dz} \text{ und } \lim (z-b)^{\frac{m-1}{m}} \frac{dw}{dz} \text{ weder Null noch unendlich ist.} \tag{27}$$

Wenn dagegen $\zeta$ oder $(z-b)^{\frac{1}{m}}$ in $w = w_b$ einen Verzweigungspunkt besitzt, und zwar einen solchen, in welchem $\mu$ Blätter der $w$-Fläche zusammenhängen, so treffen die Voraussetzungen des

Satzes (26) in der Weise zu, dass $\zeta$ als Function von $w$ in $w_b$ einen Windungspunkt $(\mu - 1)$ter Ordnung, $w$ aber als Function von $\zeta$ in $\zeta = 0$ keinen Verzweigungspunkt hat, und folglich ist dann

$$\lim \frac{\zeta}{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}$$

und also auch der umgekehrte Bruch

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z - b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und nicht Null.}$$

(28) Da nun wieder $z$ und $\zeta$ gleichverzweigte Functionen von $w$ sind, so schliessen wir: Hat $w$ an der Stelle $z = b$ einen Windungspunkt $(m - 1)$ter Ordnung, und $z$ als Function von $w$ betrachtet an der entsprechenden Stelle $w = w_b$ einen Windungspunkt $(\mu - 1)$ter Ordnung, so ist

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z - b)^{\frac{1}{m}}} \text{ endlich und von Null verschieden.}$$

Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit $h$, so folgt

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{m}{\mu}}}{z - b} = h^m,$$

und da

$$\lim \frac{w - w_b}{z - b} = \frac{dw}{dz}$$

ist,

$$\frac{dw}{dz} = \lim h^m (w - w_b)^{\frac{\mu - m}{\mu}} = \lim h^\mu (z - b)^{\frac{\mu - m}{m}}.$$

Demnach ist unter der Voraussetzung des Satzes (28) $\frac{dw}{dz}$ Null

(29) oder unendlich gross, je nachdem $\mu >$ oder $< m$ ist, und zwar so, dass

$\lim (w - w_b)^{\frac{m-\mu}{\mu}} \frac{dw}{dz}$ und $\lim (z - b)^{\frac{m-\mu}{m}} \frac{dw}{dz}$ weder Null noch unendlich ist.

Wir haben nun noch den Werth $z = \infty$ zu betrachten, indem wir die Voraussetzung beibehalten, dass er einen Verzweigungspunkt repräsentirt, in welchem aber $w$ endlich ist. Sei

$$z = \frac{1}{u},$$

und $w'$ der für $z = \infty$ oder $u = 0$ stattfindende Werth von $w$. Nehmen wir an, $z = \infty$ sei von $w$ ein Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung, $w = w'$ aber von $z$ ein Windungspunkt $(\mu - 1)$ter Ordnung, so erhalten wir nach (28), weil $z$ und $u$ gleichverzweigte Functionen von $w$ sind, und auch die Verzweigung von $w$ sich nicht ändert, ob man $w$ als Function von $z$ oder von $u$ betrachtet,

$$\lim \left[\frac{(w-w')^{\frac{1}{\mu}}}{u^{\frac{1}{m}}}\right]_{u=0} \quad \text{oder} \quad \left[\lim z^{\frac{1}{m}} (w-w')^{\frac{1}{\mu}}\right]_{z=\infty} \tag{30}$$

endlich und nicht Null,

und wenn dieser Grenzwerth mit $h$ bezeichnet wird (nach (29))

$$\frac{dw}{du} = \lim h^m (w-w')^{\frac{\mu-m}{\mu}} = \lim h^\mu u^{\frac{\mu-m}{m}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}\frac{dw}{du}$$

also

$$\frac{dw}{dz} = -\lim \frac{h^m (w-w')^{\frac{\mu-m}{\mu}}}{z^2} = -\lim \frac{h^\mu u^{\frac{\mu-m}{m}}}{z^2}$$

oder

$$\frac{dw}{dz} = -\lim \frac{(w-w')^{\frac{\mu+m}{\mu}}}{h^m} = -\lim \frac{h^\mu}{z^{\frac{\mu+m}{m}}}.$$

Demnach ist hier $\frac{dw}{dz}$ Null und zwar so, dass die Ausdrücke

$$z^2 (w-w')^{\frac{m-\mu}{\mu}} \frac{dw}{dz}, \quad \frac{1}{(w-w')^{\frac{\mu+m}{\mu}}}\frac{dw}{dz}, \quad z^{\frac{\mu+m}{m}} \frac{dw}{dz} \tag{31}$$

endliche und von Null verschiedene Grenzwerthe haben.

Endlich wenden wir uns zur Betrachtung des Falles, dass $w$ selbst in einem Verzweigungspunkte unendlich gross wird, und nehmen letzteren zuerst endlich $= b$ an. Hängen nun in $z = b$ $m$ Blätter und in $w = \infty$ $\mu$ Blätter zusammen, so können wir sofort aus (30) erkennen, welcher Ausdruck endlich und von Null

verschieden bleibt. Denn setzen wir dort $z - b$ an die Stelle von $w - w'$, ferner $w$ an die Stelle von $z$ und vertauschen $m$ und $\mu$ mit einander, so ergiebt sich, dass

$$\lim w^{\frac{1}{\mu}}(z - b)^{\frac{1}{m}} = h$$

endlich und von Null verschieden bleibt. Da nun hieraus aber

$$\lim w (z - b)^{\frac{\mu}{m}} = h^{\mu}$$

folgt, sodass auch dieser Grenzwerth weder Null noch unendlich gross ist, so ergiebt sich (nach § 38), dass $w$ in diesem Falle unendlich gross von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$ ist; und zugleich gilt auch das Umgekehrte. Indem wir ferner in dem zweiten der Ausdrücke (31) dieselben Vertauschungen vornehmen, wie oben, sehen wir, dass

$$\frac{1}{(z-b)^{\frac{m+\mu}{m}}} \cdot \frac{dz}{dw}$$

und also auch der reciproke Werth

$$(z - b)^{\frac{m+\mu}{m}} \frac{dw}{dz}$$

endlich und nicht Null ist, und dass also $\frac{dw}{dz}$ unendlich gross ist von der Ordnung $\frac{m + \mu}{m}$. Das Resultat ist daher: W i r d $w$ i n e i n e m W i n d u n g s p u n k t e $(m - 1)$ t e r O r d n u n g $z = b$ u n e n d l i c h g r o s s v o n d e r O r d n u n g $\frac{\mu}{m}$, s o i s t $w = \infty$ s e l b s t z u g l e i c h e i n W i n d u n g s p u n k t $(\mu - 1)$ t e r O r d n u n g, u n d u m g e k e h r t; u n d $\frac{dw}{dz}$ w i r d v o n d e r O r d n u n g $\frac{m + \mu}{m}$ u n e n d l i c h g r o s s.

Wird zweitens $w$ für $z = \infty$ unendlich gross, und ist dieser Punkt ein Windungspunkt $(m - 1)$ter Ordnung, während $w = \infty$ ein Windungspunkt $(\mu - 1)$ter Ordnung ist, so setze man $z = \frac{1}{u}$; dann ist nach dem vorigen Satze für $u = 0$

$$\lim w \, . \, u^{\frac{\mu}{m}}$$

und daher für $z = \infty$

$$\lim \frac{w}{z^{\frac{\mu}{m}}}$$

$$\lim u^{\frac{\ldots}{m}} \frac{dw}{du},$$

und für $z = \infty$

$$\lim \frac{1}{z^{\frac{m+\mu}{m}}} \frac{dw}{du}$$

endlich und von Null verschieden. Da nun

$$\frac{dw}{du} = - z^2 \frac{dw}{dz}$$

ist, so ist

$$\lim z^{\frac{m-\mu}{m}} \frac{dw}{dz}$$

für $z = \infty$ endlich und nicht Null, und daher $\frac{dw}{dz}$ entweder Null oder unendlich gross, je nachdem $m >$ oder $< \mu$ ist.

Hat man z. B. die Gleichung

$$(w - w')^3 (z - b)^5 = 1,$$

so ist

$$w - w' = \frac{1}{(z-b)^{\frac{5}{3}}} \text{ und } z - b = \frac{1}{(w-w')^{\frac{3}{5}}},$$

also ist $w$ für $z = b$ unendlich gross von der Ordnung $\frac{5}{3}$. Zugleich hängen an der Stelle $z = b$ drei Blätter der $z$-Fläche, und an der entsprechenden Stelle $w = \infty$ fünf Blätter der $w$-Fläche zusammen. Ferner ist

$$\frac{dw}{dz} = - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{(z-b)^{\frac{8}{3}}},$$

also für $z = b$ unendlich gross von der Ordnung $\frac{8}{3}$.

Bei den Gleichungen

$$w = z^{\frac{3}{5}} \qquad \text{und} \qquad w = z^{\frac{5}{3}}$$

sind die Stellen $z = \infty$ und $w = \infty$ entsprechend. Man erhält resp.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{z^{\frac{2}{5}}} \qquad \text{und} \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{5}{3} z^{\frac{2}{3}},$$

daher ist $\frac{dw}{dz}$ für $z = \infty$ im ersten Falle Null, und im zweiten unendlich gross.

## § 40.

Wir können nun auch angeben, in welcher Weise sich die Fläche der $z$ auf der Fläche der $w$ in der Nähe eines Verzweigungspunktes abbildet, und damit die in § 7 erwähnten Ausnahmefälle erledigen.

Nehmen wir an, $z = b$ sei ein Windungspunkt $(m - 1)$ ter, und $w = w_b$ ein Windungspunkt $(\mu - 1)$ter Ordnung, so hat (28)

$$\lim \frac{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z - b)^{\frac{1}{m}}}$$

einen bestimmten endlichen und von Null verschiedenen Grenzwerth. Nähert man sich also von verschiedenen Seiten her den Punkten $z = b$ und $w = w_b$, so ist es dieser Ausdruck, und nicht mehr, wie in § 7, der Ausdruck $\lim \frac{w - w_b}{z - b}$, welcher einen von der Richtung der Annäherung unabhängigen endlichen Werth hat. Sind demnach $z'$ und $z''$ zwei an $b$ in verschiedener Richtung unendlich nahe liegende Punkte, $w'$ und $w''$ die ihnen entsprechenden Punkte der $w$-Fläche, so ist

$$\frac{(w' - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z' - b)^{\frac{1}{m}}} = \frac{(w'' - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z'' - b)^{\frac{1}{m}}}$$

oder

$$\left(\frac{w' - w_b}{w'' - w_b}\right)^{\frac{1}{\mu}} = \left(\frac{z' - b}{z'' - b}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} w' - w_b &= \varrho' (\cos \psi' + i \sin \psi') \\ w'' - w_b &= \varrho'' (\cos \psi'' + i \sin \psi'') \\ z' - b &= r' (\cos \varphi' + i \sin \varphi') \\ z'' - b &= r'' (\cos \varphi'' + i \sin \varphi''), \end{aligned}$$

so folgt

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\cos \frac{\psi' - \psi''}{\mu} + i \sin \frac{\psi' - \psi''}{\mu}\right) = \left(\frac{r'}{r''}\right)^{\frac{1}{m}} \left(\cos \frac{\varphi' - \varphi''}{m} + i \sin \frac{\varphi' - \varphi''}{m}\right)$$

$$\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^m = \left(\frac{r'}{r''}\right)^\mu; \quad m(\psi' - \psi'') = \mu(\varphi' - \varphi'').$$

Es findet also in der Nähe des Verzweigungspunktes nicht mehr Aehnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen statt.

In dem in § 7 angeführten Beispiele

$$w = z^2$$

ist $m = 1$ und $\mu = 2$, folglich wird für den Verzweigungspunkt $w = 0$ (entsprechend $z = 0$) $\frac{dw}{dz} = 0$, da $\mu > m$ ist; zugleich ist

$$\frac{\varrho'}{\varrho''} = \left(\frac{r'}{r''}\right)^2 \qquad \psi' - \psi'' = 2(\varphi' - \varphi''),$$

was sich auch schon § 7 in einem bestimmten Falle ergeben hatte. Eine unmittelbare Folge hievon ist u. a. der Satz:*) Der Winkel, unter welchem sich zwei confocale Parabeln schneiden, ist halb so gross, als der Winkel, den ihre Axen mit einander bilden. Man überzeugt sich nämlich nach dem § 7 angegebenen Verfahren oder auch auf andere Weise leicht, dass jeder nicht durch den Nullpunkt gehenden Geraden in $z$ eine Parabel in $w$ entspricht, deren Brennpunkt im Nullpunkte liegt, und deren Axe einer Geraden in $z$ entspricht, die ebenfalls durch den Nullpunkt geht und der früheren Geraden parallel ist. Der Winkel, welchen zwei nicht durch den Nullpunkt gehende Gerade in $z$ mit einander bilden, ist nun ebenso gross, wie der Winkel, unter dem sich die entsprechenden Parabeln in $w$ schneiden; unter demselben Winkel schneiden sich auch die durch den Nullpunkt gehenden parallelen Geraden in $z$, welchen die Axen der Parabeln in $w$ entsprechen. Da aber der Nullpunkt Verzweigungspunkt von $z$ ist, und zwar $m = 1$ und $\mu = 2$, so bilden die Axen der Parabeln den doppelten Winkel mit einander.

Ausserdem erhellt aus der obigen allgemeinen Betrachtung, dass die Punkte der $w$-Fläche, welche *Siebeck* Brennpunkte nennt, und die dadurch charakterisirt sind, dass in ihnen $\frac{dw}{dz} = 0$ ist, zugleich Verzweigungspunkte sein werden, und zwar solche, für welche $\mu > m$ ist.

---

*) *Siebeck:* Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen. Crelle's Journ. Bd. 55. pag. 239.

## § 41.

**Wenn eine Function $w$ für jeden Werth von $z$ $n$ Werthe besitzt und nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird, so ist sie eine algebraische Function.**

Man bezeichne mit $w_1, w_2, \cdots w_n$ die $n$ Werthe von $w$, welche einem bestimmten Werthe von $z$ entsprechen. Bildet man nun das Product

$$S = (\sigma - w_1)(\sigma - w_2) \cdots (\sigma - w_n)$$

worin $\sigma$ eine beliebige von $z$ unabhängige Grösse bedeutet, so ist $S$ symmetrisch in Bezug auf $w_1, w_2, \cdots w_n$. Lässt man $z$ irgend eine scheinbar geschlossene (§ 12) Linie beschreiben, so werden zwar einige oder alle der Werthe $w_1, w_2, \cdots w_n$ sich geändert haben, aber in den $n$ unmittelbar über einander liegenden Punkten der $z$-Fläche wird $w$ wieder die nämlichen Werthe nur in anderer Anordnung besitzen, folglich hat sich $S$, als Function von $z$ betrachtet, dabei nicht geändert. $S$ ist also in allen Punkten eindrig, und daher eine einwerthige Function von $z$. Ausserdem wird $S$ nur da unendlich gross, wo einer oder mehrere der Werthe $w_1, w_2, \cdots w_n$ unendlich gross werden. Jeder der letzteren wird der Annahme nach nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich, also findet dasselbe auch bei $S$ statt. Demnach ist $S$ eine einwerthige Function, welche nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird, und daher nach § 32 eine **rationale** Function von $z$. Ist nun $z = a$ ein Unstetigkeitspunkt von $w$, der nicht zugleich ein Verzweigungspunkt ist, und ist in diesem $w_k$ unendlich gross, und zwar $\alpha$ Mal, so ist

$$w_k (z - a)^{\alpha} \text{ und also auch } (\sigma - w_k)(z - a)^{\alpha}$$

in $a$ nicht unendlich gross (§ 29). Ist ferner $z = b$ zugleich Unstetigkeitspunkt und Verzweigungspunkt, und hängen in demselben $\mu$ Blätter zusammen, so fallen in ihm auch $\mu$ Werthe von $w$ auf einander. Bezeichnet man diese mit $w_1, w_2, \cdots w_\mu$, und mit $\beta$ die Anzahl der Male, wie oft $w$ in $b$ unendlich gross wird, so sind nach § 38 die Grössen

$$w_1 (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \; w_2 (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \cdots\cdots w_\mu (z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}$$

und folglich auch

$$(\sigma - w_1)(z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \; (\sigma - w_2)(z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}, \cdots (\sigma - w_\mu)(z - b)^{\frac{\beta}{\mu}}$$

nicht unendlich gross. Demnach bleibt auch ihr Product

die Unstetigkeitspunkte, die nicht Verzweigungspunkte sind,

$$b_1,\ b_2,\ \cdots\ b_\nu$$

die Unstetigkeitspunkte, die zugleich Verzweigungspunkte sind, und man bezeichne die zugehörigen Ordnungszahlen $\alpha$ und $\beta$ mit entsprechenden Indices. Multiplicirt man dann $S$ mit dem Ausdruck

$$Z = (z - a_1)^{\alpha_1}\,(z - a_2)^{\alpha_2} \cdots\cdots (z - a_\lambda)^{\alpha_\lambda}$$
$$(z - b_1)^{\beta_1}\,(z - b_2)^{\beta_2} \cdots\cdots (z - b_\nu)^{\beta_\nu},$$

so bleibt das Product

$$S \cdot Z = (\sigma - w_1)\,(\sigma - w_2) \cdots\cdots (\sigma - w_n)\,(z - a_1)^{\alpha_1}\,(z - a_2)^{\alpha_2}$$
$$\cdots\cdots (z - a_\lambda)^{\alpha_\lambda}\,(z - b_1)^{\beta_1}\,(z - b_2)^{\beta_2} \cdots (z - b_\nu)^{\beta_\nu}$$

für alle Werthe $a$ und $b$, also überhaupt für alle endlichen Werthe von $z$ endlich. Demnach ist $SZ$ eine einwerthige Function, welche nur für $z = \infty$ und auch hier nur von einer endlichen Ordnung unendlich gross wird; folglich ist (nach § 31) $SZ$ eine ganze Function von $z$. Nun wird in $SZ$ zuerst jeder Factor von $Z$ für $z = \infty$ unendlich gross; bezeichnet ferner $h$ die Anzahl der Male, wie oft $w$ für $z = \infty$ unendlich gross wird, so ist die Anzahl der Male, wie oft $SZ$ für $z = \infty$ unendlich gross ist, gleich

$$h + \Sigma\alpha + \Sigma\beta = m$$

und dies ist gerade die Anzahl der Male, wie oft $w$ überhaupt unendlich gross wird. Bezeichnet man diese Zahl mit $m$, so ist $SZ$ eine ganze Function vom $m$ten Grade von $z$. Nimmt man nun auf die Grösse $\sigma$ Rücksicht, so ist $SZ$ auch eine ganze Function von $\sigma$ vom $n$ten Grade. Denkt man sich also $SZ$ nach Potenzen von $\sigma$ geordnet, so kann man sagen, dass $SZ$ eine ganze Function von $\sigma$ vom $n$ten Grade ist, deren Coefficienten ganze Functionen von $z$ sind, die bis auf den $m$ten Grad steigen, was *Riemann* durch das Zeichen

$$F(\overset{n}{\sigma}, \overset{m}{z})$$

auszudrücken pflegt. Diese Grösse verschwindet, wenn $\sigma$ einen der Werthe $w_1,\ w_2,\ \cdots\ w_n$ erhält, und daher sind dies die $n$ Wurzeln der Gleichung

$$F(\overset{n}{w}, \overset{m}{z}) = 0.$$

Folglich ist eine $n$-werthige Function, die $m$ Mal unendlich wird, die Wurzel einer algebraischen Glei-

chung zwischen $w$ und $z$, die in Bezug auf $w$ vom $n$ten, und deren Coefficienten in Bezug auf $z$ vom $m$ten Grade sind.

---

# Achter Abschnitt.

## Integrale.

---

### A. Integrale über geschlossene Linien ausgedehnt.

§ 42.

Wir schreiten jetzt zu einer Vervollständigung der im Abschnitte IV. gegebenen Sätze, wobei wieder alle nicht polaren Unstetigkeiten ausgeschlossen bleiben. Nach den im vorigen Abschnitte festgestellten Begriffen über das Unendlichwerden der Functionen können wir den in § 20 abgeleiteten Satz so aussprechen: Bezieht man das Integral

$$\int f(z)\, dz$$

auf eine geschlossene Linie, die nur einen Unstetigkeitspunkt $a$ umgiebt, welcher kein Verzweigungspunkt ist, und in welchem $f(z)$ von der ersten Ordnung unendlich gross wird, so ist

$$\int f(z)\, dz = 2\pi i \lim (z - a) f(z).$$

Wir untersuchen nun den Werth dieses Integrals, wenn $f(z)$ in $a$ unendlich gross von der $n$ten Ordnung ist. Nach § 29 ist in der Nachbarschaft des Punktes $a$

$$(32)\quad f(z) = \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c^{(k)}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich und stetig bleibt. Bildet man nun $\int f(z)\, dz$ in Bezug auf eine den Punkt $a$ umgebende geschlossene Linie, so kann man dazu einen beliebig kleinen um $a$ beschriebenen Kreis wählen und hat dann zuerst

$$\int \psi(z)\, dz = 0,$$

ferner

$$\int \frac{c'\,dz}{z-a} = 2\pi i c'.$$

Setzt man sodann

$$z - a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

so folgt

$$\int \frac{c^{(k+1)}dz}{(z-a)^{k+1}} = \frac{c^{(k+1)}i}{r^k}\int_0^{2\pi}(\cos k\varphi - i\sin k\varphi)\,d\varphi.$$

Dieses Integral verschwindet aber, weil für jeden von 0 verschiedenen ganzzahligen Werth von $k$

$$\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\,d\varphi = 0 \qquad \int_0^{2\pi}\sin k\varphi\,d\varphi = 0$$

ist. Demnach ist für jeden von 1 verschiedenen Werth von $k$

$$\int \frac{c^{(k)}\,dz}{(z-a)^k} = 0.$$

Aus dem Ausdrucke (32) verschwinden also bei der Integration alle Glieder mit Ausnahme des ersten, und man hat

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i \cdot c'.$$

Demnach ist dies Integral stets gleich Null, wenn in dem Ausdrucke, der die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied $\frac{c'}{z-a}$ fehlt; beim Vorhandensein dieses Gliedes aber hat das Integral den Werth $2\pi i c'$.

Gehen wir jetzt zu einem Verzweigungspunkte über. Ist $b$ (33) ein Unstetigkeitspunkt, in welchem $m$ Blätter der $z$-Fläche zusammenhängen, so hat man in der Nachbarschaft des Punktes $b$ (§ 38)

$$f(z) = \frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-b)^{\frac{2}{m}}} + \cdots + \frac{g^{(m)}}{z-b} + \cdots + \frac{g^{(k)}}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} + \cdots$$
$$+ \frac{g^{(n)}}{(z-b)^{\frac{n}{m}}} + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ in $z = b$ endlich und stetig ist. Bildet man nun $\int f(z)\,dz$ bezogen auf eine den Punkt $b$ umgebende geschlossene Linie, so kann man dazu einen beliebig kleinen Kreis wählen,

dessen Peripherie aber $m$ Mal durchlaufen werden muss, damit er geschlossen sei. Nun ist wieder zuerst

$$\int \psi(z)\, dz = 0,$$

ferner für

$$z - b = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\int \frac{g^{(m)} dz}{z-b} = \int_0^{2m\pi} g^{(m)} i\, d\varphi = 2m\pi i g^{(m)}.$$

Bedeutet endlich $k$ eine von $m$ verschiedene ganze Zahl, so ist

$$\int \frac{g^{(k)}\, dz}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} = g^{(k)} \int \frac{dz}{(z-b)^{\frac{k-m}{m}}(z-b)}$$

$$= \frac{g^{(k)} i}{r^{\frac{k-m}{m}}} \int_0^{2m\pi} \left(\cos\frac{k-m}{m}\varphi - i\sin\frac{k-m}{m}\varphi\right) d\varphi.$$

Nun ist aber wieder

$$\int_0^{2m\pi} \cos\frac{k-m}{m}\varphi\, d\varphi = 0 \quad , \quad \int_0^{2m\pi} \sin\frac{k-m}{m}\varphi\, d\varphi = 0,$$

so lange $k$ nicht gleich $m$ ist, und daher ist auch

$$\int \frac{g^{(k)}\, dz}{(z-b)^{\frac{k}{m}}} = 0.$$

Also verschwinden bei der Integration des Ausdruckes (33) alle Glieder mit Ausnahme von $\frac{g^{(m)}}{z-b}$, und folglich ist

$$\int f(z)\, dz = 2m\pi i g^{(m)}.$$

Demnach verschwindet auch dieses Integral immer dann, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied $\frac{g^{(m)}}{z-b}$ fehlt, und man kann allgemein den Satz aussprechen: Das Integral $\int f(z)\, dz$ genommen um einen Unstetigkeitspunkt, um welchen die $z$-Fläche sich $m$ Mal windet, und in welchem nur eine polare Unstetigkeit stattfindet, hat dann und nur dann einen

von Null verschiedenen Werth, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied, das von der ersten Ordnung unendlich gross wird, vorhanden ist; und dieser Werth ist dann gleich $2m\pi i$ Mal dem Coefficienten dieses Gliedes. Wenn der Unstetigkeitspunkt kein Verzweigungspunkt ist, braucht man nur $m = 1$ zu setzen.

## § 43.

Schon im § 14 ist der Vorstellungsart gedacht worden, nach welcher man sich die unendliche Ebene als eine Kugel mit unendlich grossem Radius, also als eine geschlossene Fläche, und dann den Werth $z = \infty$ durch einen bestimmten Punkt repräsentirt denken kann. In diesem Falle kann man auch von geschlossenen Linien reden, welche den unendlich entfernten Punkt umgeben. Wir wollen nun untersuchen, wie sich Integrale verhalten, wenn sie auf solche geschlossene Linien bezogen werden. Diese bilden, auch wenn man sich die unendlich grosse Kugel wieder in der Ebene ausgebreitet denkt, geschlossene Linien, aber dasjenige von der Linie begrenzte Gebiet, welches den Punkt $z = \infty$ enthält, liegt in der Ebene ausserhalb der geschlossenen Linie.

Führt man statt $z$ eine andere Variable $u$ ein, indem man

$$z - h = \frac{1}{u - k}$$

und dann

$$f(z) = \varphi(u)$$

setzt, wo $h$ und $k$ zwei beliebig zu wählende Punkte bedeuten mögen, so entspricht jedem Punkte $z$ ein Punkt $u$ und umgekehrt. Den Punkten $z = h$ und $u = k$ aber entsprechen resp. $u = \infty$ und $z = \infty$. Setzt man

$$z - h = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so wird

$$u - k = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Beschreibt nun $z$ eine geschlossene Linie $Z$, welche den Punkt $h$ umgiebt, so wächst $\varphi$ von 0 bis zu einem Vielfachen von $2\pi$; daher umgiebt auch die entsprechende, von $u$ beschriebene Linie $U$ den Punkt $k$, und zwar in ebenso vielen Umläufen, wird aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Geht ferner $z$ von der Peripherie von $Z$ nach aussen, so wächst $r$, oder der Modul von

$z-h$, folglich nimmt $\frac{1}{r}$, oder der Modul von $u-k$ ab, und daher geht $u$ von der Peripherie von $U$ nach innen. Demnach entsprechen allen ausserhalb $Z$ liegenden Punkten $z$ solche Punkte $u$, die innerhalb $U$ liegen. Betrachtet man jetzt die Curve $Z$ als die Begrenzung des ausserhalb liegenden Flächentheils, so ist die positive Begrenzungsrichtung für diesen die entgegengesetzte, wie für den inneren Flächentheil; daher werden $Z$ und $U$ gleichzeitig in der positiven Begrenzungsrichtung der einander entsprechenden Flächentheile durchlaufen.

Nun ist

$$f(z) = \varphi(u) \quad , \quad dz = -\frac{du}{(u-k)^2},$$

also erhält man

$$\int f(z)\, dz = -\int \frac{\varphi(u)\, du}{(u-k)^2},$$

und darin bezieht sich das erste Integral auf die Curve $Z$, und das zweite auf die entsprechende Curve $U$, auf beide in positiver Begrenzungsrichtung erstreckt. Hat man nun bei einer geschlossenen Fläche eine Curve $Z$, welche den Punkt $\infty$ umgiebt, so ist diese in der Ebene eine geschlossene Linie, welche den ausserhalb liegenden Flächentheil begrenzt. Der beliebig anzunehmende Punkt $h$ kann immer so gewählt werden, dass er innerhalb der Curve $Z$ liegt, dann entspricht der Flächentheil, welcher den Punkt $z=\infty$ enthält, dem innerhalb $U$ liegenden Flächentheile, und auf die positiven Begrenzungen dieser Flächentheile erstreckt gilt die vorige Gleichung

$$\int f(z)\, dz = -\int \frac{\varphi(u)\, du}{(u-k)^2}.$$

Der Werth des Begrenzungsintegrales $\int f(z)\, dz$ hängt also von der Beschaffenheit der Function $\frac{\varphi(u)}{(u-k)^2}$ ab. Nun braucht man nur solche Curven $Z$ zu betrachten, welche abgesehen von dem Punkte $z=\infty$, keine Unstetigkeitspunkte enthalten, dann wird auch $\varphi(u)$ innerhalb $U$ höchstens für $u=k$ unendlich gross; es kommt also darauf an, ob und wie $\frac{\varphi(u)}{(u-k)^2}$ für $u=k$ unendlich gross ist. Dieser Ausdruck ist gleich $(z-h)^2 f(z)$, und da für $z=\infty$

$$\lim (z-h)^2 f(z) = \lim z^2 f(z)$$

ist, so ergiebt sich, dass zur Ermittelung unseres Begrenzungsintegrals **nicht sowohl die Beschaffenheit der Function** $f(z)$ **als vielmehr die der Function** $z^2 f(z)$ **im Punkte**

tegral in der positiven Begrenzungsrichtung des Flächenstücks, das den Punkt $\infty$ enthält, genommen wird, der Integralwerth das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten muss. Ist also $z^2 f(z)$ für $z = \infty$ endlich, d. h. ist

$$\lim z f(z) = 0,$$

so ist das Integral Null; es genügt also hiezu nicht, dass $f(z)$ endlich bleibe, es muss vielmehr unendlich klein mindestens von der zweiten Ordnung sein. Ist ferner $z^2 f(z)$ unendlich gross von der ersten Ordnung, d. h. ist

$$\lim z f(z) \text{ endlich und von Null verschieden,}$$

so ist

$$\int f(z)\, dz = -2\pi i \lim z f(z),$$

das Integral in der positiven Begrenzungsrichtung um den Punkt $\infty$ genommen. Im Allgemeinen hat das Integral dann und nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in der Entwickelung von $f(z)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von $z$, ein Glied von der Form

$$\frac{g}{z}$$

vorhanden ist.

Als Beispiel diene zuerst

$$\int \frac{dz}{1 + z^2};$$

hier ist

$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{1 + z^2} = \lim \frac{1}{\frac{1}{z} + z} = 0,$$

also ist das Integral, bezogen auf eine den Punkt $\infty$ umgebende Linie, gleich Null. In der That ist jede, die beiden Punkte $z = -i$ und $z = +i$ umgebende Linie zugleich eine den Punkt $\infty$ umgebende, da die Function weiter keine Unstetigkeitspunkte hat, und wir haben schon § 20 gesehen, dass für eine solche Linie das vorliegende Integral den Werth Null hat.

Zweitens. Wird das Integral

$$\int \frac{dz}{z}$$

auf eine Linie um den Nullpunkt in der Richtung der wachsenden Winkel bezogen, so hat es den Werth $2\pi i$. Dieselbe Linie ist aber auch eine den Punkt $\infty$ umgebende, da die Function $f(z) = \frac{1}{z}$ nur den einen Unstetigkeitspunkt $z = 0$ besitzt. Obgleich nun hier $f(z)$ für $z = \infty$ nicht unendlich gross ist, so hat doch das Integral einen von Null verschiedenen Werth, weil

$$\left[\lim z f(z)\right]_{z=\infty} = \lim z \frac{1}{z} = 1$$

ist. Man erhält demnach

$$\int \frac{dz}{z} = -2\pi i,$$

und in der That muss die Linie in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, wenn sie den Theil in positiver Richtung begrenzt, der den Punkt $\infty$ enthält.

Drittens kann man hienach den Werth des Integrals

$$J = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

ermitteln, wenn es auf eine im ersten Blatte verlaufende Linie ausgedehnt wird, welche die beiden Unstetigkeits- und Verzweigungspunkte $+1$ und $-1$ umgiebt. Denn eine solche umgiebt zugleich den Punkt $\infty$, ohne einen weiteren Unstetigkeitspunkt einzuschliessen. Nun ist hier

$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}} = \pm \frac{1}{i},$$

also wird

$$J = \pm 2\pi,$$

wo über das Zeichen noch zu entscheiden ist. Nun kann aber andrerseits die Linie, welche die Punkte $+1$ und $-1$ umgiebt, bis an den Verzweigungsschnitt heran verengert werden. Setzt man dann fest, dass die Quadratwurzel auf der linken Seite des Verzweigungsschnittes, in der Richtung von $-1$ nach $+1$ genommen, im ersten Blatte das Vorzeichen $+$, und daher auf der rechten Seite desselben ebenfalls im ersten Blatte das Vorzeichen $-$ habe (vgl. § 13), so ist auch, in der Richtung der abnehmenden Winkel integrirt (um den Punkt $\infty$ herum in der positiven Begrenzungsrichtung),

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 4 \int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Da nun hier alle Elemente des Integrals positiv sind, so muss auch $J$ positiv sein, und man erhält

$$J = 4 \int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = +\, 2\pi;$$

und daher auch

$$\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ueber den Umstand, dass dies Integral einen endlichen Werth erhält, obgleich die Function $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ für $z = 1$ unendlich gross wird, vergleiche den folgenden §.

## B. Integrale über nicht geschlossene Linien. Unbestimmte Integralfunctionen.

### § 44.

Wir behandeln in diesem Abschnitte die Frage, ob und unter welchen Bedingungen eine Integralfunction endlich bleibt, wenn die obere Grenze derselben entweder einen Werth erreicht, für den die Function unter dem Integralzeichen unendlich gross wird, oder selbst sich ins Unendliche entfernt. Wir untersuchen ferner, in welcher Weise die Integralfunction unendlich gross wird, wenn sie in diesen Fällen nicht endlich bleibt. Dabei beschränken wir uns aber auf solche Integrale, die unter dem Integralzeichen eine algebraische Function enthalten.

Sei

$$F(t) = \int_{h}^{t} \varphi(z)\, dz$$

die zu betrachtende Integralfunction, worin $h$ eine beliebige Constante bedeute. Wir berücksichtigen bei derselben nur solche Integrationswege, welche der Function denselben Werth zuertheilen; die nächsten Abschnitte werden zeigen, dass die durch die verschiedenen Integrationswege hervorgebrachte Vieldeutigkeit einer Integralfunction den hier anzustellenden Betrachtungen keinen Eintrag thut.

Nimmt man zuerst an, $\varphi(z)$ werde in einem Punkte $z = a$, der kein Verzweigungspunkt ist, unendlich gross von der $n$ten Ordnung, so kann man nach § 29 setzen

$$(34)\qquad \varphi(z) = \frac{c'}{z-a} + \frac{c''}{(z-a)^2} + \cdots\cdots + \frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich bleibt. Hieraus folgt

$$\int_h^t \varphi(z)\,dz = c'\int_h^t \frac{dz}{z-a} + c''\int_h^t \frac{dz}{(z-a)^2} + \cdots\cdots + c^{(n)}\int_h^t \frac{dz}{(z-a)^n}$$
$$+ \int_h^t \psi(z)\,dz.$$

Darin ist das letzte Glied eine auch für $t = a$ endlich bleibende Function; bezeichnen wir dieselbe mit $\lambda(t)$, und denken wir in derselben die von der unteren Grenze $h$ der übrigen Integrale herrührenden constanten Glieder mit einbegriffen, so erhalten wir

$$F(t) = c'\log(t-a) - \frac{c''}{t-a} - \frac{c'''}{2(t-a)^2} - \cdots - \frac{c^{(n)}}{(n-1)(t-a)^{n-1}}$$
$$+ \lambda(t).$$

Lässt man nun den Integrationsweg in dem Punkte $t = a$ endigen, so unterscheidet sich die Integralfunction von einer in $t = a$ endlich bleibenden Function $\lambda(t)$ um eine Grösse, welche das Glied $\log(t-a)$ enthält. Man sagt in diesem Falle, es wird $F(t)$ logarithmisch unendlich. Dieser Fall tritt ein, wenn in dem Ausdrucke (34) für $\varphi(z)$ das Glied $\frac{c'}{z-a}$ vorhanden ist. Fehlt dagegen dieses Glied, so fällt der Logarithmus fort, und $F(t)$ wird von einer ganzen Ordnung unendlich gross. Aber endlich bleibt $F(t)$ für $t = a$ nur dann, wenn

$$\lim\,(z-a)\,\varphi(z) = 0$$

ist, d. h. wenn $\varphi(z)$ selbst in $z = a$ endlich bleibt.

Nehmen wir daher jetzt an, der Unstetigkeitspunkt $a$ sei zugleich ein Verzweigungspunkt. Hängen in demselben $m$ Blätter der $z$-Fläche zusammen, so kann man nach § 38 setzen

$$(35)\qquad \varphi(z) = \frac{g'}{(z-a)^{\frac{1}{m}}} + \frac{g''}{(z-a)^{\frac{2}{m}}} + \cdots\cdots + \frac{g^{(m)}}{z-a} + \frac{g^{(m+1)}}{(z-a)^{\frac{m+1}{m}}}$$
$$+ \cdots\cdots + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich bleibt. Man erhält hieraus

$$(t-a)^{\frac{1}{m}}$$

$$- \cdots \cdots + \lambda(t),$$

wenn wie oben mit $\lambda(t)$ das letzte endlich bleibende Glied mit Hinzuziehung der von der unteren Grenze $h$ herrührenden Constanten bezeichnet wird.

Wenn nun in diesem Ausdrucke höchstens die $m-1$ ersten Glieder vorhanden sind, so bleibt $F(t)$ für $t=a$ endlich. Dieser Fall tritt ein, wenn auch in (35) höchstens die $m-1$ ersten Glieder vorhanden sind. Dann ist $\varphi(z)$ höchstens von der Ordnung $\frac{m-1}{m}$ unendlich, und folglich

$$\lim (z-a)\,\varphi(z) = 0.$$

Demnach ist die Bedingung für das Endlichbleiben der Function $F(t)$ hier dieselbe wie vorhin, und wir erhalten den allgemeinen Satz:

1) Die Integralfunction

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\,dz$$

einer algebraischen Function $\varphi(z)$ hat für $t=a$ dann und nur dann einen endlichen Werth, wenn $\lim (z-a)\,\varphi(z) = 0$ ist. Ferner ergiebt sich Folgendes:

2) Ist $\lim (z-a)\,\varphi(z)$ endlich, aber von Null verschieden, so ist $F(t)$ für $t=a$ logarithmisch unendlich.

3) Hat $\lim (z-a)^{\mu}\,\varphi(z)$ für einen ganzen oder gebrochenen Exponenten $\mu$, der grösser als 1 ist, einen endlichen von Null verschiedenen Werth, so ist $F(t)$ von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung, und wenn in der Entwickelung von $\varphi(z)$ das Glied von der Form $\frac{g}{z-a}$ vorhanden ist, zugleich logarithmisch unendlich.

## § 45.

Wir haben nun noch den Werth $t=\infty$ zu untersuchen. Durch die schon mehrmals angewendete Substitution

$$z = \frac{1}{u}$$

führen wir diesen Fall auf den vorigen zurück. Sei

$$\frac{1}{t} = \tau \quad , \quad F(t) = F_1(\tau) \quad , \quad \varphi(z) = \varphi_1(u),$$

so wird

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\,dz = -\int_{\frac{1}{h}}^{\tau} \frac{\varphi_1(u)du}{u^2} = F_1(\tau).$$

Die Beschaffenheit von $F_1(\tau)$ richtet sich also nach der Beschaffenheit der Function $\frac{\varphi_1(u)}{u^2}$ für den Werth $u = 0$. Die Ergebnisse des vorigen § liefern dann Folgendes:

1) $F_1(\tau)$ ist endlich, wenn $\left[\lim \frac{u\varphi_1(u)}{u_2}\right]_{u=0} = \left[\lim \frac{\varphi_1(u)}{u}\right]_{u=0} = 0.$

2) $F_1(\tau)$ ist logarithmisch unendlich, wenn $\lim \frac{\varphi_1(u)}{u}$ endlich und nicht Null.

3) $F_1(\iota)$ ist von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung (oder auch zugleich logarithmisch) unendlich, wenn für $\mu > 1$

$\lim \frac{u^\mu \varphi_1(u)}{u^2} = \lim \left(u^{\mu-2} \varphi_1(u)\right)$ endlich und nicht Null ist.

Nun ist

$$\frac{\varphi_1(u)}{u} = z\varphi(z) \quad ; \quad u^{\mu-2}\varphi_1(u) = \frac{\varphi(z)}{z^{\mu-2}},$$

also schliessen wir: für $t = \infty$ ist

1) $F(t)$ endlich, wenn $[\lim z\varphi(z)]_{z=\infty} = 0,$

2) $F(t)$ logarithmisch unendlich, wenn $\lim z\varphi(z)$ endlich und nicht Null;

3) $F(t)$ von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung oder auch zugleich logarithmisch unendlich, wenn $\lim \frac{\varphi(z)}{z^{\mu-2}}$ endlich und nicht Null ist ($\mu$ positiv und $> 1$).

Beispiele:

$\int_0^t \frac{dz}{1+z^2}$ wird für $t = +i$ oder $-i$ logarithmisch unendlich, bleibt aber endlich für $t = \infty$.

logarithmisch unendlich für $t = \infty$.

$$\int_0^t \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$ bleibt endlich für $t = \pm 1$ und $t = \pm \frac{1}{k}$

und auch für $t = \infty$, ist also für jeden Werth von $t$ endlich.

$$\int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz$$ bleibt endlich für $t = \pm 1$, und wird für

$t = \infty$ von der ersten Ordnung unendlich.

$$\int_0^t \frac{dz}{(1-a^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$ bleibt endlich für $t = \pm 1$ und

$= \pm \frac{1}{k}$, ebenso für $t = \infty$, und wird für $t = \pm \frac{1}{a}$ logarithmisch unendlich.

---

# Neunter Abschnitt.

## Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen.

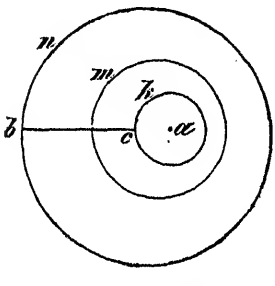
### § 46.

Für die Untersuchung der Vieldeutigkeit einer Integralfunction $\int f(z)\, dz$ ist von besonderer Bedeutsamkeit die Beschaffenheit der $z$-Fläche für die unter dem Integralzeichen stehende Function $f(z)$ in Rücksicht auf ihren Zusammenhang. In dieser Beziehung ist schon in § 18 der grosse Unterschied hervorgetreten, welcher zwischen solchen Flächen stattfindet, in denen jede geschlossene Linie für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet, und solchen, in denen nicht jede geschlossene Linie diese Eigenschaft besitzt. Wir müssen nun zuvörderst die

Flächen in Beziehung auf diesen Unterschied etwas näher ins Auge fassen.*)

Man nennt nach *Riemann* die Flächen der ersteren Art **einfach zusammenhängend**, die der zweiten Art **mehrfach zusammenhängend**. Einfach zusammenhängend ist z. B. eine Kreisfläche, die Fläche einer Ellipse, überhaupt jede Fläche, welche nur aus einem Blatte besteht und von einer Linie begrenzt wird, die einfach in sich zurückläuft, ohne sich selbst zu schneiden. Mehrfach zusammenhängende Flächen können entstehen, wenn aus einfach zusammenhängenden Unstetigkeitspunkte durch kleine Kreise ausgeschlossen werden. Schliesst man z. B. aus einer Kreisfläche einen Unstetigkeitspunkt $a$ dadurch aus, dass man ihn mit einem kleinen Kreise $k$ (Fig. 25) umgiebt, so entsteht eine Fläche, die nicht mehr einfach zusammenhängend ist; denn zieht man um $k$ herum eine geschlossene Linie $m$, so bildet diese für sich allein nicht die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, sondern erst mit Zuziehung entweder des kleinen Kreises $k$, oder des äusseren Kreises $n$. Es können aber Flächen auch ohne alle Ausschliessung einzelner Punkte mehrfach zusammenhängend sein, wenn sie Verzweigungspunkte besitzen und daher aus mehreren Blättern bestehen, die über die Verzweigungsschnitte hinüber in einander übergehn.

Fig. 25.




Es kommt uns nun zunächst darauf an, ein bestimmtes Kennzeichen zu gewinnen, aus welchem man ersehen kann, ob eine geschlossene Linie für sich allein eine vollständige Begrenzung bildet oder nicht. Dazu führen die folgenden Betrachtungen; diese beziehen sich zwar im Allgemeinen auf beliebige Flächen, doch werden solche ausgeschlossen, die sich längs einer Linie in zwei oder mehrere Blätter spalten.

Zwei Flächentheile heissen überhaupt zusammenhängend, wenn man aus einem Punkte im Inneren des einen Theiles auf einer ununterbrochenen Linie zu einem Punkte des anderen Theiles gelangen kann, ohne eine Begrenzungslinie zu überschreiten; im entgegengesetzten Falle heissen die Flächentheile getrennt. Wenn nun ein Theil $A$ einer zusammenhängenden Fläche durch eine Linie

*) Wir werden hier und im Folgenden unter einer geschlossenen Linie stets eine solche verstehen, die einfach in sich zurückläuft, ohne sich selbst zu durchschneiden.

vollständig begrenzt ist, so wird er durch seine Begrenzung von dem übrigen Theile $B$ der Fläche getrennt, indem es nicht möglich ist, aus dem vollständig begrenzten Theile $A$ in den anstossenden $B$ zu gelangen, ohne die Begrenzungslinie an irgend einer Stelle zu überschreiten; und es ist klar, dass eine geschlossene Linie nur dann einen Flächentheil $A$ wirklich vollständig begrenzt, wenn zwischen diesem Theile und dem übrigen ein Zusammenhang nicht stattfindet. Hierauf lässt sich ein Criterium stützen, an dem man erkennen kann, ob in einer Fläche $T$ eine geschlossene Linie $m$ für sich allein eine vollständige Begrenzung bildet oder nicht. Wenn man nämlich von irgend einem Punkte der Linie $m$ aus nur auf der einen Seite an die Begrenzung (den Rand) von $T$ gelangen kann, ohne die Linie $m$ zu überschreiten, auf der anderen aber nicht, so bildet die auf der letzteren Seite an $m$ anliegende Fläche einen getrennten Theil des Ganzen, der also von der Linie $m$ allein vollständig begrenzt ist. Kann man dagegen von einem Punkte der Linie $m$ aus zu beiden Seiten an den Rand von $T$ gelangen, ohne $m$ zu überschreiten, so hängen auf beiden Seiten die an $m$ anstossenden Flächentheile mit solchen zusammen, die am Rande von $T$ sich befinden. Daher giebt es in diesem Falle keinen von der Linie $m$ allein begrenzten Flächentheil, der einen getrennten Theil des Ganzen ausmacht. Die Linie $m$ bildet also dann für sich allein nicht eine vollständige Begrenzung. (Vgl. hiezu Fig. 25, wo man von einem beliebigen Punkte der Linie $m$ aus auf der einen Seite an den Randtheil $k$, auf der anderen an den Randtheil $n$ gelangen kann.)

Dieses Kennzeichen lässt sich unmittelbar nicht anwenden auf ganz geschlossene Flächen, die, wie z. B. eine Kugelfläche, gar keine Begrenzung haben. Man kann aber einer solchen Fläche dadurch eine Begrenzung geben, dass man aus ihr an einer ganz beliebig zu wählenden Stelle einen unendlich kleinen Kreis, oder, was dasselbe ist, einen einzigen Punkt herausgenommen denkt. (Man denke sich etwa ein Blatt der Fläche an irgend einer Stelle mit einer Nadel durchstochen.) Dieser Punkt oder die Peripherie des unendlich kleinen Kreises bildet dann die Begrenzung oder den Rand der Fläche. Wir werden in Zukunft eine geschlossene Fläche stets in dieser Weise durch einen Punkt begrenzt voraussetzen, der übrigens an jeder beliebigen Stelle der Fläche angenommen werden kann. Dadurch wird dann das obige Kennzeichen auch auf geschlossene Flächen anwendbar. Es mögen nun zur Verdeutlichung einige Beispiele angeführt werden:

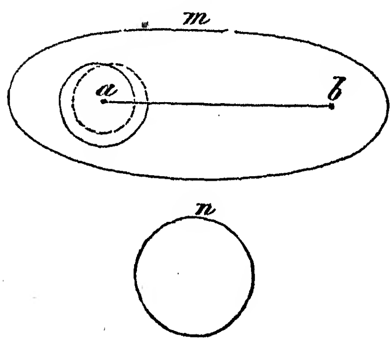
1) Eine Kugelfläche ist einfach zusammenhängend. Denn zieht man auf ihr irgend eine geschlossene Linie $m$ und nimmt

irgendwo auf der Fläche einen Punkt $x$ an, der zur Begrenzung dient, so kann man von $m$ aus immer nur auf der einen Seite nach $x$ gelangen, niemals auch gleichzeitig auf der anderen Seite; daher bildet jede geschlossene Linie $m$ für sich allein eine vollständige Begrenzung.

2) Hat eine Fläche einen Verzweigungspunkt $a$, in welchem $n$ Blätter der Fläche zusammenhängen, und begrenzt man ein Flächenstück durch eine Linie, welche den Punkt $a$ in $n$ Umläufen umgiebt und dadurch sich schliesst, so ist ein so begrenztes Flächenstück einfach zusammenhängend. Denn wie man darin auch eine geschlossene Linie ziehen mag, immer kann man nur auf der einen Seite derselben an den Rand der Fläche gelangen.

3) Eine aus zwei Blättern bestehende im Unendlichen geschlossene Fläche, die zwei Verzweigungspunkte $a$ und $b$ (Fig. 36) besitzt, welche durch einen Verzweigungsschnitt verbunden sind, ist eine einfach zusammenhängende Fläche. — Man kann hier nur dreierlei Arten von geschlossenen Linien ziehen: solche die keinen, solche die einen, und solche die zwei Verzweigungspunkte umgeben. Die erste und letzte Art sind nicht wesentlich von einander verschieden, denn je nachdem man eine solche Linie $m$ oder $n$ als Begrenzung des inneren oder äusseren Flächentheils ansieht, umgiebt sie entweder beide Verzweigungspunkte oder keinen. Eine solche Linie wie $m$ oder $n$ bildet aber stets eine vollständige Begrenzung, denn man kann von ihr immer nur auf der einen Seite nach dem beliebig anzunehmenden Begrenzungspunkte gelangen. Eine geschlossene Linie endlich, welche nur einen Verzweigungspunkt, z. B. $a$ umgiebt, geht zweimal um denselben herum, da sie beim Ueberschreiten des Verzweigungsschnittes in das zweite Blatt tritt und daher, um in das erste zurück zu gelangen und sich zu schliessen, den Verzweigungsschnitt noch einmal überschreiten muss. Dann aber bildet sie ebenfalls eine vollständige Begrenzung.

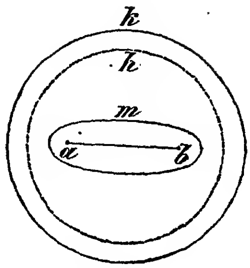
Fig. 36.




4) Die vorige Fläche wird zu einer mehrfach zusammenhängenden, sobald sie in jedem Blatte durch eine geschlossene

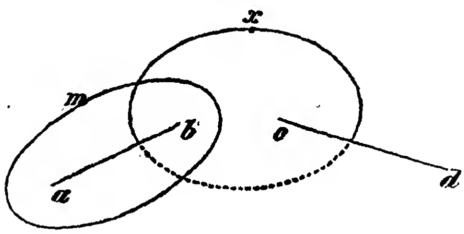
Linie begrenzt wird ($h$ und $k$ Fig. 37; die punktirte Linie verläuft im zweiten Blatte); denn jetzt bildet eine um $a$ und $b$ im ersten Blatte herumgehende Linie $m$ keine vollständige Begrenzung, da man von ihr zu beiden Seiten an den Rand der Fläche gelangen kann: nämlich auf der einen Seite nach $k$ direct, auf der anderen nach $h$ über den Verzweigungsschnitt hinüber.

Fig. 37.




5) Eine aus zwei Blättern bestehende, im Unendlichen geschlossene Fläche, welche vier paarweise durch Verzweigungsschnitte $ab$, $cd$ verbundene Verzweigungspunkte besitzt, ist mehrfach zusammenhängend (Fig. 38). Denn zieht man eine Linie $m$, welche die Punkte $a$ und $b$ im ersten Blatte umgiebt, so kann man von derselben zu beiden Seiten nach dem beliebig anzunehmenden Begrenzungspunkte $x$ gelangen. Liegt derselbe etwa im ersten Blatte, so geschieht dies auf der einen Seite direct, auf der anderen Seite aber, indem man den Verzweigungsschnitt $ab$ überschreitet. Dadurch gelangt man in das zweite Blatt und kann, ohne die Linie $m$ zu treffen, da diese ganz in dem ersten Blatte verläuft, den anderen Verzweigungsschnitt $cd$ erreichen; überschreitet man ihn, so kommt man wieder in das erste Blatt zurück und gelangt so ebenfalls nach $x$.

Fig. 38.




## § 47.

Von der grössten Wichtigkeit ist es nun, dass man, wenn auch vielleicht nicht immer und ganz allgemein, so doch in einer grossen Anzahl von Fällen eine mehrfach zusammenhängende Fläche durch Hinzufügung von Begrenzungslinien in eine einfach zusammenhängende umwandeln kann. Solche Linien, die der ursprünglichen Begrenzung hinzugefügt werden, heissen nach *Riemann* Querschnitte. Unter einem Querschnitt wird nämlich im Allgemeinen eine Linie verstanden, welche in einem Punkte einer Be-

grenzung beginnt, in das Innere der Fläche hineingeht und, indem sie nirgends weder eine andere Begrenzungslinie, noch auch sich selbst überschreitet, in einem Punkte einer Begrenzung endigt. Damit der Inhalt und die Tragweite dieser Definition deutlich hervortrete, betrachten wir die verschiedenen Arten der Querschnitte etwas näher. Ein Querschnitt kann einmal zwei Punkte der nämlichen Randcurve mit einander verbinden (*ab* Fig. 39), sodann zwei auf verschiedenen Randcurven liegende Punkte (*cd*). Er kann auch in demselben Punkte einer Begrenzungslinie endigen, in dem er begonnen hat (*efge*), also eine geschlossene Linie sein. Dies ist namentlich der Fall, wenn in einer geschlossenen Fläche ein Querschnitt zu ziehen ist; denn da bei einer solchen die ursprüngliche Begrenzung nur aus einem einzigen Punkte besteht (§ 46), so muss der Querschnitt in diesem beginnen und in ihm auch endigen, wenn nicht der sogleich zu erwähnende Fall eintritt, dass er in einem Punkte seines früheren Laufes endigt. Es wurde nämlich schon bemerkt, dass die Querschnitte als Begrenzungslinien zu betrachten sind, die zu den schon vorhandenen Begrenzungslinien hinzukommen. Wenn daher ein Querschnitt angefangen worden ist, so werden seine Punkte sofort als einer neu hinzugekommenen Begrenzung angehörig betrachtet, und da nun der Querschnitt nur in einem Punkte einer Begrenzung zu endigen braucht, so kann er auch in einem seiner früheren Punkte endigen (*abcdb* Fig. 40).

Fig. 39.

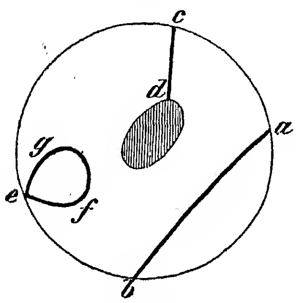
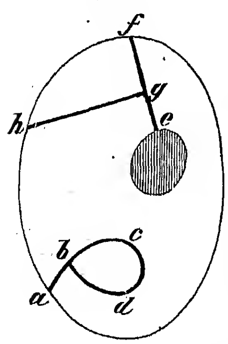


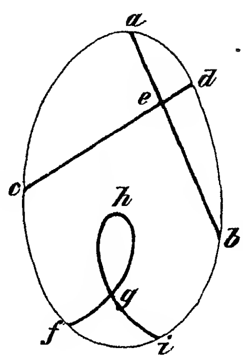

Fig. 40.




Aus demselben Grunde, weil nämlich jeder schon gezogene Querschnitt mit zur Begrenzung gehört, kann ein folgender Querschnitt auch in einem Punkte eines früheren anfangen oder endigen (Fig. 40, wo *ef* ein früherer, und *gh* ein darauf folgender Querschnitt ist). Schliesslich ist noch Folgendes hervorzuheben. Da ein Querschnitt niemals eine Begrenzungslinie überschreiten darf, so darf er auch niemals einen früheren Querschnitt überschreiten. Wenn daher eine zwei Begrenzungspunkte verbindende Linie einen früheren Querschnitt durchschneidet, so bildet eine solche nicht einen, sondern zwei Querschnitte, indem einer in dem Schnittpunkte aufhört, und an

derselben Stelle ein neuer beginnt. So bilden z. B. in Fig. 41 die beiden Linien *ab* und *cd* nicht zwei, sondern drei Querschnitte, nämlich je nachdem *ab* oder *cd* zuerst gezogen wurde, entweder *ab*, *ce*, *ed* oder *cd*, *ae*, *eb*. Aehnlich werden von der Linie *fghi* zwei Querschnitte gebildet, nämlich entweder *fghg* und *gi*, oder *ighg* und *gf*.

Fig. 41.




In allen Fällen ist ein Querschnitt wie ein in der Fläche wirklich ausgeführter Schnitt zu betrachten, sodass in einem solchen allemal zwei Begrenzungslinien vereinigt sind (die beiden durch den Schnitt hervorgebrachten Ränder), von denen die eine dem auf der einen Seite, die andere dem auf der anderen Seite des Querschnittes anliegenden Flächentheile als Begrenzungslinie angehört.

Was nun die Möglichkeit anbetrifft, mehrfach zusammenhängende Flächen durch Querschnitte in einfach zusammenhängende umzuwandeln, so mag dieselbe zunächst in einigen einfachen Fällen zur Anschauung gebracht werden. Zieht man z. B. in der durch die Linien *k* und *n* begrenzten Fläche (Fig. 25) einen Querschnitt *bc* und rechnet beide Seiten desselben mit zur Begrenzung, indem man sich die Fläche längs *bc* wirklich durchgeschnitten denkt, so kann man keine geschlossene Linie mehr ziehen, welche *k* umgiebt, sondern jede geschlossene Linie bildet für sich allein eine vollständige Begrenzung. Dasselbe wird bei der durch die Linien *h*, *k*, *n*

Fig. 25.

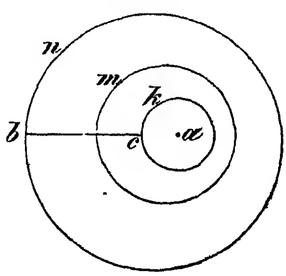
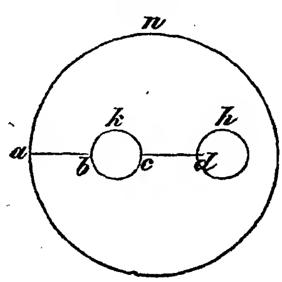



Fig. 42.




begrenzten Fläche (Fig. 42) durch zwei Querschnitte *ab*, *cd* geleistet. In dem letzteren Beispiele bemerke man zugleich, dass die Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche auf

mehrfache Weise, immer aber durch zwei Querschnitte $ab$, $cd$ bewerkstelligt werden kann, z. B. auch so, wie Fig. 43 und 44 zeigen.

Fig. 43.

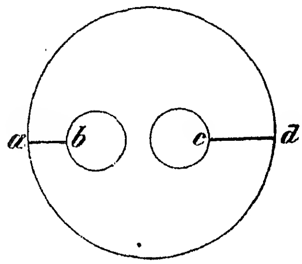
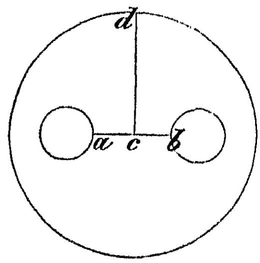



Fig. 44.




## § 48.

Wir gehen jetzt dazu über, die Zerlegbarkeit einer mehrfach zusammenhängenden Fläche in eine einfach zusammenhängende auch im Allgemeinen zu untersuchen, und beweisen dazu zunächst eine Reihe vorbereitender Sätze.

I. Wenn eine Fläche $T$ durch irgend einen Querschnitt $ab$ **nicht** in getrennte Theile zerlegt wird, so ist sie mehrfach zusammenhängend.

**Beweis.** Nehmen wir zuerst an, die Endpunkte $a$ und $b$ des Querschnittes liegen beide auf der ursprünglichen Begrenzung von $T$, wobei jedoch das Zusammenfallen von $a$ und $b$ nicht ausgeschlossen sein möge. Da der Querschnitt $ab$ der Annahme nach die Fläche nicht in getrennte Theile theilt, so hängen seine beiden Seiten zusammen, und man kann von einem Punkte $c$ desselben aus eine geschlossene Linie $m$ ziehen, welche von der einen Seite des Querschnittes durch das Innere der Fläche auf die andere Seite führt. Eine solche Linie $m$ aber bildet für sich allein nicht eine vollständige Begrenzung, denn man kann von $c$ aus zu beiden Seiten von $m$ längs des Querschnittes an den Rand von $T$, nämlich nach $a$ und nach $b$ gelangen. Mithin ist $T$ wirklich mehrfach zusammenhängend. — Dasselbe findet statt, wenn der die Fläche nicht zerstückende Querschnitt ein solcher ist, der in einem Punkte seines früheren Laufes endigt. (Vgl. Fig. 40, $abcd$.) Denn alsdann muss man auch von einem auf dem geschlossenen Theile des Querschnittes liegenden Punkte $c$ aus eine geschlossene Linie $m$ ziehen können, die von der einen Seite des Querschnittes zur an-

deren führt.*) Eine solche geschlossene Linie $m$ aber bildet wieder nicht eine vollständige Begrenzung, da man von $c$ aus zu beiden Seiten von $m$ längs des Querschnittes an den Rand der Fläche, nämlich nach $a$, gelangen kann. (In Fig. 40 sind diese beiden Wege $cba$ und $cdba$.)

II. In einer mehrfach zusammenhängenden Fläche ist es allemal möglich, einen Querschnitt zu ziehen, der die Fläche nicht in getrennte Theile theilt.

Beweis. Da die Fläche mehrfach zusammenhängend ist, so giebt es in ihr mindestens eine geschlossene Linie $m$, die für sich allein nicht eine vollständige Begrenzung bildet, und von der man also nach beiden Seiten an den Rand der Fläche kommen kann (§ 46). Man kann daher von einem Punkte $c$ der Linie $m$ aus zwei Linien $ca$ und $cb$ ziehen, die auf verschiedenen Seiten der Linie $m$ durch das Innere der Fläche gehen und in den Punkten $a$ und $b$ des Randes endigen (wobei $a$ und $b$ auch zusammenfallen können). Diese beiden Linien bilden dann zusammen einen Querschnitt $ab$, da sie zusammen als eine Linie betrachtet werden können, die in einem Randpunkte $a$ beginnt und, ohne irgendwo eine Begrenzungslinie zu überschreiten, in einem Randpunkte $b$ endigt. Dieser Querschnitt aber zerstückt die Fläche nicht, denn man kann längs der Linie $m$ selbst von der einen Seite des Querschnittes auf dessen andere Seite gelangen, sodass diese beiden Flächentheile zusammenhängen und nicht getrennt sind.

Anmerkung. Das Vorige lehrt zugleich, wie in einer mehrfach zusammenhängenden Fläche ein dieselbe nicht zerstückender Querschnitt gezogen werden kann, wenn man in der Fläche eine geschlossene Linie kennt, die für sich allein nicht eine vollständige Begrenzung bildet.

III. Eine aus einem Stücke bestehende Fläche kann durch einen Querschnitt höchstens in zwei Stücke zerfällt werden.

Beweis. Entweder hängen die zu beiden Seiten des Querschnittes liegenden Flächentheile zusammen, dann zerstückt der Querschnitt die Fläche gar nicht; oder sie hängen nicht zusammen, dann liegen jene Flächentheile in getrennten Stücken. Betrüge nun die Anzahl der letzteren mehr als zwei, so müsste in den an der nämlichen Seite des Querschnittes liegenden Flächentheilen selbst

---

*) Dies ist möglich, wenn z. B. innerhalb des geschlossenen Theiles $bcd$ des Querschnittes ein Verzweigungsschnitt sich befindet, den die Linie $m$ überschreiten kann, wodurch sie in ein anderes Blatt gelangt, in welchem sie dem Querschnitt nicht begegnet.

eine Unterbrechung des Zusammenhanges eintreten, was nicht der Fall ist, da der Querschnitt nirgends eine Begrenzungslinie überschreitet.*)

IV. Eine einfach zusammenhängende Fläche wird durch jeden Querschnitt in zwei getrennte Theile getheilt, von denen jeder für sich wieder einfach zusammenhängend ist.

Beweis. Der erste Theil dieses Satzes folgt unmittelbar aus I. und III., denn wenn irgend ein Querschnitt die Fläche nicht zerstückte, so könnte diese nicht einfach zusammenhängend sein, und in mehr als zwei Theile kann die Fläche nicht zerfallen. Dass aber jeder der entstandenen Theile wieder für sich einfach zusammenhängend sein muss, ist ohne Weiteres klar; denn da in der unzertheilten Fläche jede geschlossene Linie für sich eine vollständige Begrenzung bildet, so gilt dasselbe auch von jeder geschlossenen Linie, die ganz innerhalb eines der entstandenen Theile verläuft.

V. Eine einfach zusammenhängende Fläche zerfällt durch $q$ Querschnitte in $q + 1$ getrennte Theile, von denen jeder für sich einfach zusammenhängend ist.

Beweis. Wenn man, nachdem die Fläche zuerst durch einen Querschnitt nach IV. in zwei getrennte Theile zerlegt ist, einen neuen Querschnitt zieht, so kann dieser, da er den ersten Querschnitt nicht überschreiten darf (§ 47.), nur in dem einen der beiden entstandenen Theile verlaufen; diesen aber zertheilt er in zwei Theile, sodass zwei Querschnitte die Fläche in drei Theile theilen. Diese sind alle wieder für sich einfach zusammenhängend. Zieht man nun auf's Neue einen Querschnitt, so wird wieder nur einer der schon vorhandenen Theile in zwei zerlegt, und so fügt jeder folgende Querschnitt nur einen neu entstehenden Theil hinzu. Demnach sind am Ende, nachdem $q$ Querschnitte gezogen worden sind, $q + 1$ getrennte Theile vorhanden; und diese sind alle nach IV. für sich einfach zusammenhängend.

Zusatz. Hieraus folgt unmittelbar: Ist von Anfang an ein Flächensystem vorhanden, das aus $\alpha$ getrennten und für sich einfach zusammenhängenden Theilen besteht, so wird dieses durch $q$ Querschnitte in $\alpha + q$ ebenso beschaffene Theile zertheilt.

VI.* Wenn eine Fläche durch jeden Querschnitt in getrennte Theile getheilt wird, so ist sie einfach zusammenhängend. — Denn

*) Bei einem Querschnitte, der in einem Punkte seines früheren Laufes endigt, besteht die eine Seite aus den von innen an den geschlossenen Theil anstossenden Flächentheilen, die andere Seite aus den übrigen Flächentheilen.

wäre sie mehrfach zusammenhängend, so könnte sie nach II. nicht durch jeden Querschnitt zerstückt werden.

VII. Wenn eine Fläche $T$ durch irgend einen Querschnitt $Q$ in zwei getrennte Theile $A$ und $B$ getheilt wird, von denen jeder für sich einfach zusammenhängend ist, so ist auch $T$ einfach zusammenhängend.

Beweis. Wir zeigen, dass unter den gemachten Voraussetzungen jeder in $T$ gezogene Querschnitt diese Fläche zerstücken muss. Dies ist zuerst klar von jedem Querschnitte, der ganz innerhalb $A$ oder $B$ liegt, also den $Q$ nicht überschreitet, denn verläuft ein solcher z. B. ganz innerhalb $A$, so zerlegt er $A$ in zwei getrennte Theile (IV.), von denen der an $Q$ anstossende mit $B$ zusammen einen Theil von $T$, der andere einen zweiten von dem vorigen getrennten Theil von $T$ bildet. Ueberschreitet aber ein Querschnitt $Q'$ den $Q$ ein oder mehrere Male, so wird er durch die Durchschnittspunkte in Stücke zerlegt, welche Querschnitte entweder in $A$ oder in $B$ bilden und daher (IV.) diese Theile wiederum in getrennte Theile zerlegen. Man kann also weder in $A$ noch in $B$ von der einen Seite des $Q'$ auf dessen andere Seite gelangen. Dann ist dies aber auch in $T$, d. h. mit Hülfe einer Ueberschreitung des $Q$, nicht möglich, da man dabei immer nur aus $A$ nach $B$ oder umgekehrt gelangt. Demnach zerstückt $Q'$ die Fläche $T$ ebenfalls. Da diese nun durch jeden Querschnitt in zwei getrennte Theile zerlegt wird, so ist sie nach VI. einfach zusammenhängend.

VIII. Wenn eine mehrfach zusammenhängende Fläche $T$ durch einen Querschnitt in zwei getrennte Theile zerlegt wird, so ist von diesen mindestens der eine wieder mehrfach zusammenhängend. — Denn wären beide einfach zusammenhängend, so könnte $T$ nach VII. nicht mehrfach zusammenhängend sein.

IX. Wenn eine aus einem Stücke bestehende Fläche durch $q$ Querschnitte in $q+1$ Theile zerfällt wird, von denen jeder für sich einfach zusammenhängend ist, so ist sie selbst einfach zusammenhängend.

Beweis. Jeder der gezogenen Querschnitte muss den Theil, in welchem er verläuft, in zwei getrennte Theile theilen, denn wenn auch nur ein einziger dies nicht thäte, so würden, da ein Querschnitt nach III. einen Theil niemals in mehr als zwei Theile theilen kann, am Ende weniger als $q+1$ getrennte Theile vorhanden sein. Wäre nun die gegebene Fläche mehrfach zusammenhängend, so würde der erste Querschnitt nach VIII. höchstens einen einfach zusammenhängenden Theil abschneiden können, während

der andere mehrfach zusammenhängend bleibt. Nimmt man nun an, um den günstigsten Fall hervorzuheben, dass der Querschnitt jedesmal in dem mehrfach zusammenhängenden Theile angebracht wird, und so, dass von diesem ein einfach zusammenhängendes Stück abgelöst wird, so würde am Ende ein Theil übrig bleiben, der nicht einfach zusammenhängend ist. Ueberhaupt würden bei jeder Zerschneidungsart entweder weniger als $q+1$ Theile vorhanden sein, oder mindestens einer dieser Theile würde mehrfach zusammenhängend sein müssen.

## § 49.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu dem folgenden

Hauptsatz. Wenn eine Fläche oder ein Flächensystem $T$ auf eine Art durch $q_1$ Querschnitte $Q_1$ in $\alpha_1$ getrennte Theile, und auf eine zweite Art durch $q_2$ Querschnitte $Q_2$ in $\alpha_2$ getrennte Theile getheilt wird, der Art, dass sowohl die $\alpha_1$ Theile der ersten Art, als auch die $\alpha_2$ Theile der zweiten Art alle für sich einfach zusammenhängend sind, so ist allemal

$$q_1 - \alpha_1 = q_2 - \alpha_2.$$

Beweis.*) Die beiden durch die Querschnitte $Q_1$ und $Q_2$ aus $T$ erzeugten Flächensysteme mögen resp. $T_1$ und $T_2$ heissen. Zieht man entweder in $T_1$ die Linien $Q_2$, oder in $T_2$ die Linien $Q_1$, so erhält man beide Male das nämliche Flächensystem, überhaupt die nämliche Figur. Dieses neue Flächensystem heisse $\mathfrak{T}$. Die in $T_1$ gezogenen Linien $Q_2$ bilden zwar $q_2$ Querschnitte in dem ursprünglichen Systeme $T$, allein in $T_1$ kann das anders sein, denn da einerseits, wenn Linien $Q_2$ ganz in Linien $Q_1$ hineinfallen, die ersteren aufhören, als Querschnitte in $T_1$ zu existiren, andererseits die Linien $Q_2$ durch die $Q_1$ in mehrere Theile zerlegt werden können, so kann die Anzahl der Querschnitte, die die $Q_2$ in $T_1$ wirklich bilden, kleiner oder auch grösser als $q_2$ ausfallen. Ebenso kann auch die Anzahl der Querschnitte, die von den Linien $Q_1$ in dem Systeme $T_2$ gebildet werden, von $q_1$ verschieden sein. Wir bezeichnen die von den Linien $Q_2$ in $T_1$ gebildeten Querschnitte mit $Q_2'$, ihre Anzahl mit $q_2'$; und die von den $Q_1$ in $T_2$ gebildeten Querschnitte mit $Q_1'$, ihre Anzahl mit $q_1'$. Der Nerv des Beweises besteht dann darin, dass wenn

$$q_2' = q_2 + m$$

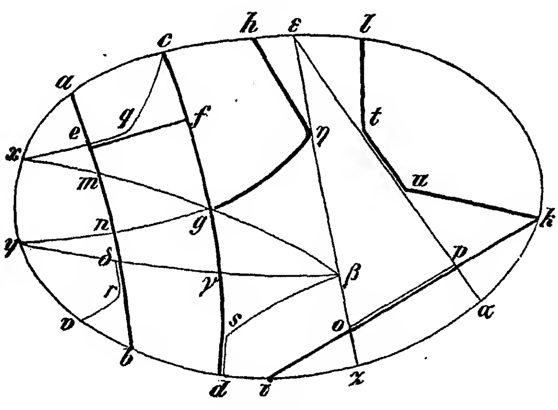
*) *Riemann.* Grundlagen etc. pag. 6.

gesetzt wird, auch

$$q_1' = q_1 + m$$

sein muss. Um dies zu beweisen, richte man sein Augenmerk auf die Endpunkte der Querschnitte, indem man bemerke, dass die Anzahl der Querschnitte halb so gross ist, als die Anzahl ihrer Endpunkte,*) und dass dies durchgängig der Fall ist, sobald man nur, wenn in einen Punkt ein Anfangspunkt eines Querschnittes und ein Endpunkt eines solchen zusammenfallen, einen solchen Punkt doppelt zählt. Die Anzahl der Endpunkte der $q_2$ Querschnitte $Q_2$ beträgt demgemäss $2q_2$; werden nun aber diese als Querschnitte $Q_2'$ in dem bereits durch die $Q_1$ zerschnittenen Systeme $T_1$ betrachtet, so können einerseits einige Endpunkte der $Q_2$ aufhören, Endpunkte der $Q_2'$ zu sein, andererseits können neue Punkte als Endpunkte der $Q_2'$ hinzukommen. (Vgl. Fig. 45. Darin sind die $Q_1$ durch stärkere, die $Q_2$ durch schwächere Linien bezeichnet, und an den Stellen, wo eine Linie $Q_1$ mit einer Linie $Q_2$ ganz oder theilweise zusammenfällt, sind die Linien dicht nebeneinander verlaufend dargestellt.)

Fig. 45.




1) Ein Endpunkt eines $Q_2$ ist allemal zugleich ein Endpunkt eines $Q_2'$, wenn er gar nicht in eine der Linien $Q_1$ hineinfällt (z. B. $\alpha$ oder $\beta$), aber auch dann, wenn nur ein Endpunkt eines $Q_2$ mit einem Endpunkte eines $Q_1$ coincidirt (z. B. $c$ oder $g$). Dagegen ist ein Endpunkt eines $Q_2$ nicht auch zugleich ein End-

*) Den Anfangs- und den Endpunkt eines Querschnittes bezeichnen wir zusammen als die beiden Endpunkte desselben.

punkt eines $Q_2'$, wenn der $Q_2$ von diesem Endpunkte aus eine Strecke weit (oder auch vollständig) mit einem $Q_1$ sich deckt (z. B. $ds$, $\delta r$, $op$, $po$). In einem solchen Falle hört nämlich der betreffende Punkt entweder ganz auf, als Endpunkt für einen $Q_2'$ zu existiren (z. B. $o$ oder $p$), oder er wird als solcher nur verschoben. (Während z. B. der Querschnitt $ds\beta$, als ein $Q_2$ betrachtet, in $d$ beginnt, fängt derselbe, als $Q_2'$ betrachtet, erst in $s$ an; $d$ ist also zwar Endpunkt eines $Q_2$, nicht aber eines $Q_2'$.) Dies kann nun in zwei Fällen eintreten: entweder sind die sich deckenden Strecken beide Endstücke resp. eines $Q_2$ und eines $Q_1$ (z. B. $ds$), oder ein Endstück eines $Q_2$ coincidirt mit einem mittleren Stücke eines $Q_1$ (z. B. $\delta r$, $op$, $po$). Bezeichnet also

$\nu$ die Anzahl, wie oft ein Endstück eines $Q_2$ ein Endstück eines $Q_1$ deckt,

$\nu_2$ die Anzahl, wie oft ein Endstück eines $Q_2$ ein mittleres Stück eines $Q_1$ deckt,

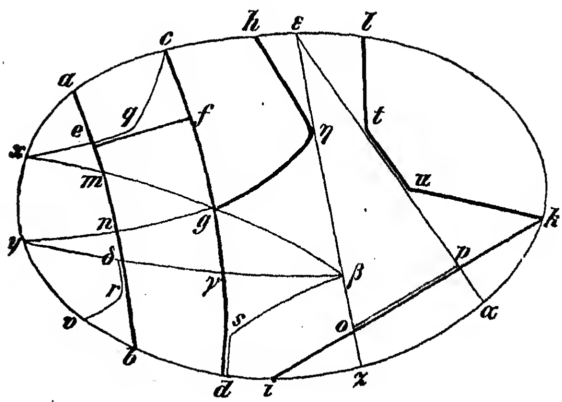
so ist

$$\nu + \nu_2$$

die Anzahl der Endpunkte der $Q_2$, welche nicht zugleich Endpunkte der $Q_2'$ sind. Die Anzahl $2q_2$ der Endpunkte der $Q_2$ muss also um $\nu + \nu_2$ vermindert werden.

Dieselbe Betrachtung wiederholt sich bei den Querschnitten $Q_1$. Ein Endpunkt eines $Q_1$ hört auf ein Endpunkt eines $Q_1'$ zu sein,

Fig. 45.




wenn ein Endstück eines $Q_1$ entweder mit einem Endstücke eines $Q_2$ (z. B. $ds$), oder mit einem mittleren Stücke eines $Q_2$ zusammenfällt (z. B. $\epsilon q$). Bezeichnet also ferner noch

$\nu_1$ die Anzahl, wie oft ein Endstück eines $Q_1$ ein mittleres Stück eines $Q_2$ deckt,

so ist $$\nu + \nu_1$$
die Anzahl der Endpunkte der $Q_1$, die nicht auch zugleich Endpunkte der $Q_1'$ sind, sodass die Zahl $2q_1$ der Endpunkte der $Q_1$ um $\nu + \nu_1$ vermindert werden muss.

2) Nun treten aber neue Punkte als Endpunkte der $Q_2'$ oder $Q_1'$ auf, die nicht Endpunkte der $Q_2$ oder $Q_1$ sind. Betrachten wir wieder zuerst die $Q_2'$. Als neue Endpunkte derselben treten zuerst auf: die oben als verschoben bezeichneten Punkte (z. B. $r$ oder $s$), sodann aber solche Punkte, bei denen entweder ein mittlerer Punkt eines $Q_2$ mit einem mittleren Punkte eines $Q_1$ (z. B. $\gamma$ oder $\eta$), oder eine mittlere Strecke eines $Q_2$ mit einer mittleren Strecke eines $Q_1$ zusammenfällt (z. B. $tu$). Alle diese Fälle lassen sich als solche bezeichnen, in denen die Linien $Q_1$ und $Q_2$ in ihrem mittleren Laufe entweder zusammentreffen oder sich trennen. Es sei $\mu$ die Anzahl der Male, wie oft dies vorkommt. Ueber die Bestimmung dieser Zahl $\mu$ ist aber Folgendes zu bemerken. Zunächst muss überall da, wo eine Linie $Q_2$ mit einer Linie $Q_1$ nur einen einzelnen mittleren Punkt (nicht eine Strecke) gemein hat (z. B. bei $\gamma$ oder $\eta$), dieser Punkt doppelt gezählt werden, da er ein Endpunkt eines $Q_2'$ und zugleich Anfangspunkt eines neuen $Q_2'$ ist. Sodann aber wollen wir festsetzen, dass die Zahl $\mu$ so bestimmt werde, dass ihr Werth davon unabhängig sei, ob man die $Q_2$ mit den $Q_1$ in Beziehung setzt, oder umgekehrt die $Q_1$ mit den $Q_2$. Das erfordert, wenn bei zwei Querschnitten die eine Beziehung eine grössere Anzahl zu zählender Punkte ergiebt, als die andere, dass man die grössere Zahl zu nehmen hat. Die auf diese Art zu viel gezählten Punkte müssen dann wieder beseitigt werden. Nun kommt dieser Fall bei den Querschnitten $Q_2'$ dann und nur dann vor, wenn in einen mittleren Punkt eines $Q_2$, in den ein mittlerer Punkt eines $Q_1$ hineintritt, zugleich eine mit dem $Q_2$ coincidirende Endstrecke eines anderen $Q_1$ *) einmündet (z. B. bei $e$, wo $qe$ einmündet; hier muss $e$ bei der Bestimmung von $\mu$ doppelt gezählt werden, weil $ab$ und $xc$ in $e$ nur einen einzelnen Punkt gemein haben, und $e$ zugleich Endpunkt von $ea$ und $em$ ist; aber auf $xc$ tritt $e$ nur einmal als ein Endpunkt, nämlich von $xe$ auf, während der Theil $ec$, als ein $Q_2'$ betrachtet, erst in $q$ beginnt, welcher Punkt bei der Bestimmung

---

*) Dieser kann auch der nämliche sein, wie der zuerst genannte, wenn er in einem früheren Punkte seines Laufes endet. Vgl. die zweite Note pag. 170.

der Zahl $\mu$ ebenfalls mit gezählt werden muss). Dieser Fall kommt also nur dann, dann aber auch immer vor, wenn eine Endstrecke eines $Q_1$ mit einer mittleren Strecke eines $Q_2$ zusammenfällt, denn damit dies möglich sei, muss durch den Endpunkt des $Q_1$ zugleich noch ein anderer $Q_1$*) hindurchgehn. Die Anzahl der Male, wie oft eine Endstrecke eines $Q_1$ mit einer mittleren Strecke eines $Q_2$ zusammenfällt, war oben mit $\nu_1$ bezeichnet. Demnach befinden sich unter den zur Bestimmung der Zahl $\mu$ mitgezählten Punkten $\nu_1$ solche, die nicht Endpunkte der $Q_2'$ sind. Die Anzahl der neu auftretenden Endpunkte der $Q_2'$ beträgt also

$$\mu - \nu_1.\text{**)}$$

Ebenso verhält es sich bei der Bestimmung der Anzahl der Punkte, die neu als Endpunkte der $Q_1'$ auftreten. Die Zahl $\mu$ bleibt, wenn sie so bestimmt wird, wie oben angegeben wurde, dieselbe wie vorhin. Unter diesen $\mu$ Punkten sind aber diejenigen keine Endpunkte der $Q_1'$, bei denen zugleich eine Endstrecke eines $Q_2$ mit einem mittleren Stücke eines $Q_1$ zusammenfällt (z. B. bei

---

*) Vgl. die Note auf pag. 169.

**) Es giebt auch Fälle, in denen die Zahl $\mu$ auf verschiedene Weise gezählt werden kann; die Differenz $\mu - \nu_1$ bleibt aber dann doch dieselbe. In Fig. 46 sind zwei solcher Fälle angegeben. Der in einem Punkte seines früheren Laufes endende Querschnitt $abcdb$ (ein $Q_1$) coincidirt mit $ef$ (als einem $Q_2$) längs der Strecke $bd$. Nimmt man den ersteren in dem Sinne $abdcb$, so hat man auf beiden Querschnitten zwei Punkte $\mu$, nämlich $b$ und $d$; es ist also $\mu = 2$, zugleich ist dann $bd$ eine mittlere Strecke, mithin $\nu_1 = 0$. Nimmt man den $Q_1$ dagegen in dem Sinne $abcdb$, so ist $b$ zwei Mal zu zählen, man hat also jetzt $\mu = 3$, zugleich aber ist dann $db$ eine Endstrecke des $Q_1$, die mit einer mittleren Strecke des $Q_2$ coincidirt, also $\nu_1 = 1$. Die Differenz $\mu - \nu_1$ ist in beiden Fällen dieselbe. — Aehnlich ist es in dem anderen Beispiele. Hier hat man die Wahl, entweder $lhik$ als den früheren und $hfg$ als den späteren Querschnitt anzunehmen, oder $gfhik$ als den früheren und $hl$ als den späteren. Längs der Strecke $fhi$ findet Coincidenz mit dem Querschnitt zweiter Art $mn$ statt. Wählt man nun die erste Aufeinanderfolge, so hat man drei Punkte zu zählen, nämlich $h$, $i$ und $f$, also ist $\mu = 3$, zugleich aber ist $hf$ eine Endstrecke, also $\nu_1 = 1$. Bei der zweiten Aufeinanderfolge sind dagegen nur $f$ und $i$ zu zählen, also ist $\mu = 2$, zugleich aber $\nu_1 = 0$, da nun $fh$ eine mittlere Strecke ist.

Fig. 46.

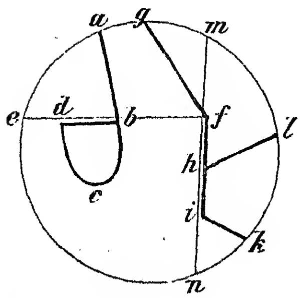
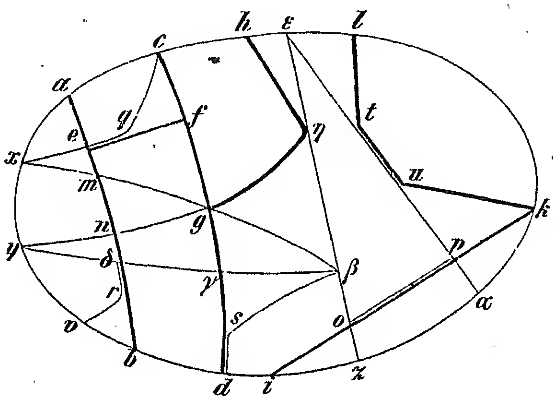


Fig. 45.




$\delta$, welcher Punkt zweimal zu zählen ist; er tritt zwar als Endpunkt von $\delta n$, nicht aber von $\delta b$ auf, da dieser Querschnitt, als ein $Q_1'$ betrachtet, erst in $r$ beginnt). Nach der obigen Bezeichnung kommt dies $\nu_2$ Mal vor; daher ist die Anzahl der neu als Endpunkte von Querschnitten $Q_1'$ auftretenden Punkte gleich

$$\mu - \nu_2.$$

Nun fallen nach 1) von den ursprünglichen $2q_2$ Endpunkten der $Q_2$ fort: $\nu + \nu_2$, und nach 2) kommen neu hinzu: $\mu - \nu_1$; die Anzahl $2q_2'$ der Endpunkte der Querschnitte $Q_2'$ ist also

$$2q_2' = 2q_2 - (\nu + \nu_2) + \mu - \nu_1$$

und daher

$$q_2' = q_2 + \frac{\mu - (\nu + \nu_1 + \nu_2)}{2}.$$

Andrerseits fallen nach 1) von den ursprünglichen $2q_1$ Endpunkten der $Q_1$ fort: $\nu + \nu_1$, und nach 2) kommen neu hinzu: $\mu - \nu_2$; also ist die Anzahl $2q_1'$ der Endpunkte der $Q_1'$

$$2q_1' = 2q_1 - (\nu + \nu_1) + \mu - \nu_2$$

und

$$q_1' = q_1 + \frac{\mu - (\nu + \nu_1 + \nu_2)}{2}.$$

Setzt man demnach

$$\frac{\mu - (\nu + \nu_1 + \nu_2)}{2} = m,$$

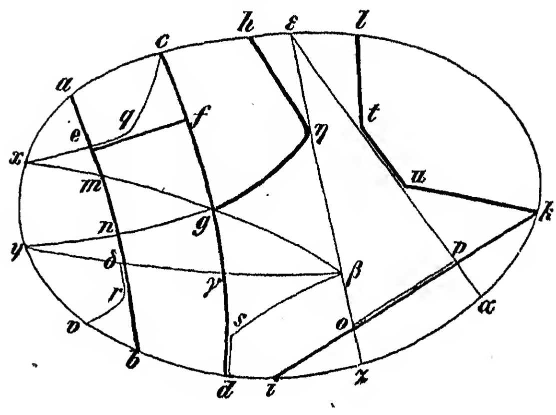
so ist, was zunächst zu beweisen war, gleichzeitig

$$q_2' = q_2 + m \qquad \text{und} \qquad q_1' = q_1 + m.$$

Betrachten wir, ehe wir weiter gehn, die Fig. 45 in Beziehung auf die oben geschilderten Verhältnisse vollständig. In der folgenden Tabelle sind in der ersten Columne die Querschnitte $Q_1$ aufgezählt und neben jedem in der zweiten Columne die Theile angegeben, in die er zerfällt, wenn die Fläche vorher durch die $Q_2$ zerschnitten gedacht wird, also die Querschnitte $Q_1'$. Aehnliche Bedeutung haben die mit $Q_2$ und $Q_2'$ überschriebenen Columnen.

| $\underbrace{Q_1}$ | $\underbrace{Q_1'}$ | $\underbrace{Q_2}$ | $\underbrace{Q_2'}$ |
|---|---|---|---|
| $ab$ | $ae$, $em$, $mn$, $n\delta$, $rb$ | $xc$ | $xe$, $qc$ |
| $cd$ | $cg$, $g\gamma$, $\gamma s$ | $\varepsilon z$ | $\varepsilon\eta$, $\eta o$, $oz$ |
| $ef$ | $qf$ | $x\beta$ | $xm$, $mg$, $g\beta$ |
| $gh$ | $g\eta$, $\eta h$ | $yg$ | $yn$, $ng$ |
| $ik$ | $io$, $pk$ | $y\beta$ | $y\delta$, $\delta\gamma$, $\gamma\beta$ |
| $kl$ | $ku$, $tl$ | $\delta v$ | $rv$ |
| | | $\beta d$ | $\beta s$ |
| | | $\varepsilon\alpha$ | $\varepsilon t$, $up$, $p\alpha$ |
| | | $op$ | — |

Fig. 45.



Hienach ist

$$q_1 = 6 \qquad q_1' = 15 \qquad m = 9.$$
$$q_2 = 9 \qquad q_2' = 18$$

Ferner machen wir die Punkte $\mu$ namhaft und deuten jeden Punkt, der doppelt zu zählen ist, durch eine darüber gesetzte 2 an:

$$\overset{2}{e} \quad \overset{2}{m} \quad \overset{2}{n} \quad \overset{2}{\delta} \quad r \quad \overset{2}{g} \quad \overset{2}{\gamma} \quad s \quad q \quad \overset{2}{\eta} \quad \overset{2}{o} \quad \overset{2}{p} \quad t \quad u;$$

es ist also

$$\mu = 23.$$

Die coincidirenden Endstrecken sind:

$$\begin{array}{lll} \text{Kategorie der } \nu \ldots . ds, & & \nu = 1 \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad \nu_1 \ldots eq, & & \nu_1 = 1 \\ \text{,,} \quad \text{,,} \quad \nu_2 \ldots \delta r,\ op,\ po, & & \nu_2 = 3, \end{array}$$

mithin

$$m = \frac{\mu - (\nu + \nu_1 + \nu_2)}{2} = \frac{23 - 5}{2} = 9$$

wie oben.

Der übrige Theil des Beweises ist nun sehr leicht zu erledigen. Das System $T_1$ besteht der Annahme nach aus $\alpha_1$ getrennten und für sich einfach zusammenhängenden Theilen. Aus diesem wird durch die $q_2' = q_2 + m$ Querschnitte $Q_2'$ das System $\mathfrak{T}$ erzeugt. Das letztere besteht nach § 48, IV ebenfalls aus lauter einfach zusammenhängenden Theilen, und bezeichnet $\mathfrak{A}$ die Anzahl der letzteren, so ist nach V Zus.

$$\mathfrak{A} = \alpha_1 + q_2 + m.$$

Das nämliche System $\mathfrak{T}$ wird auch aus $T_2$ durch die $q_1' = q_1 + m$ Querschnitte $Q_1$ erzeugt. Da aber $T_2$ der Annahme nach aus $\alpha_2$ getrennten und für sich einfach zusammenhängenden Theilen besteht, so hat man auch

$$\mathfrak{A} = \alpha_2 + q_1 + m.$$

Mithin ist

$$\alpha_1 + q_2 + m = \alpha_2 + q_1 + m$$

oder

$$q_2 - \alpha_2 = q_1 - \alpha_1.$$

Anmerkung. Man kann den Beweis dieses Satzes, nachdem man sich von den dabei zu berücksichtigenden Umständen Rechenschaft gegeben hat, kürzer in folgender Art führen.*) Man nehme zunächst an, dass die Linien $Q_1$ und $Q_2$ nur das mit einander gemeinsam haben, dass eine Linie der einen Art eine der anderen Art einfach durchkreuzt, und zwar so, dass der Kreuzungspunkt nicht ein Endpunkt eines Querschnittes ist. Kommt dann ein solcher Fall $k$ Mal vor, so hat man nach den obigen Erörterungen und mit Anwendung der früheren Bezeichnungen

$$2q_2' = 2q_2 + 2k, \qquad 2q_1' = 2q_1 + 2k$$

und daher

$$q_2' = q_2 + k, \qquad q_1' = q_1 + k.$$

Liegen nun aber die beiden Querschnittsysteme in beliebiger Weise

*) *Neumann*, Vorlesungen über Riemann's Theorie etc. p. 296.

gegen einander, indem die Linien $Q_1$ und $Q_2$ einander in beliebigen Punkten theils durchkreuzen, theils berühren, oder auch einander ganz oder theilweise decken, so kann man durch eine unendlich kleine Verschiebung der Linien des einen Systems bewirken, dass das Gemeinsame entweder ganz beseitigt wird oder nur in der vorigen Annahme besteht. Sind nach einer solchen Verschiebung $k$ Durchkreuzungspunkte vorhanden, so hat man wieder $q_2' = q_2 + k$ und $q_1' = q_1 + k$, woraus dann wie oben der Satz folgt. Gilt aber derselbe nach der unendlich kleinen Verschiebung, so muss er auch vor derselben gelten, da durch diese weder die Anzahl der Querschnitte noch auch die Anzahl der Theile, in welche die Fläche zerfällt, geändert wird.

## § 50.

Betrachten wir nun den Fall, dass die ursprüngliche Fläche $T$ aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke bestehe, und dass ferner die durch die Querschnitte $Q_1$ und $Q_2$ erzeugten Flächen $T_1$ und $T_2$ jede eine einzige einfach zusammenhängende Fläche bilde, so ist, damit dieser Fall eintreten könne, zuerst nöthig, dass keiner der gezogenen Querschnitte die Fläche zerstücke, und damit dies nicht eintrete, ist nach § 48, II und IV weiter erforderlich, dass $T$ mehrfach zusammenhängend sei und bei beiden Zerschneidungsarten bis nach Ziehung des vorletzten Querschnittes mehrfach zusammenhängend bleibe und erst durch den letzten Querschnitt einfach zusammenhängend werde. In einem solchen Falle ist nun $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, mithin $q_2 - 1 = q_1 - 1$ und daher auch $q_2 = q_1$. Wir erhalten hiedurch folgenden Satz:

Wenn es möglich ist, eine mehrfach zusammenhängende Fläche durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende umzuwandeln, und wenn dies auf mehr als eine Art möglich ist, so ist die Anzahl der Querschnitte, durch welche diese Umwandlung bewirkt wird, immer die gleiche.

Ausser diesem Satze ist auch noch der folgende von Wichtigkeit: Wenn eine mehrfach zusammenhängende Fläche auf irgend eine bestimmte Art durch $q$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann, so wird diese Verwandlung stets durch $q$ beliebige Querschnitte bewirkt, wie diese auch gezogen werden mögen, sobald sie die Fläche nur nicht zerstücken. Wenngleich nämlich in dem vorigen Satze bewiesen worden ist, dass die Anzahl $q$ der Querschnitte dieselbe bleibt, wenn die Zerschneidung in eine einfach zusammenhängende

Fläche auf eine zweite Art möglich ist, so bleibt doch zu erwägen, ob diese Zerschneidung wirklich auf eine zweite Art bewerkstelligt werden kann; ob nicht vielmehr, wenn die Querschnitte nicht von vorne herein in der richtigen Weise gezogen werden, der Fall eintreten kann, dass die Fläche unaufhörlich mehrfach zusammenhängend bleibt, wie weit man auch das Ziehen der Querschnitte fortsetzen mag, und dass man niemals zu einer einfach zusammenhängenden Fläche gelangt. Man kann aber in der That zeigen, dass dieser Fall nicht eintreten kann. Wir setzen also voraus, die Fläche $T$ werde durch $q$ in bestimmter Weise gezogene Querschnitte $Q_1$ in die einfach zusammenhängende Fläche $T_1$ verwandelt. Dann folgt zunächst aus dem vorigen Satze, wenn statt der vorigen andere Querschnitte gezogen werden, dass die Fläche $T$ nicht durch weniger als $q$ Querschnitte einfach zusammenhängend werden kann. Es ist daher nach § 48, II möglich, $q$ andere, die Fläche ebenfalls nicht zerstückende Querschnitte $Q_2$ zu ziehen, wodurch eine Fläche $T_2$ entstehen möge; es fragt sich, ob $T_2$ einfach zusammenhängend sein muss. Man lasse wie in § 49 aus $T_1$ und $T_2$ ein neues Flächensystem $\mathfrak{T}$ auf doppelte Art entstehn, indem man einmal in $T_1$ die Linien $Q_2$, und das andere Mal in $T_2$ die Linien $Q_1$ zieht. Die Anzahl der Querschnitte, welche die $Q_2$ in $T_1$ bilden, möge wie in § 49 mit $q+m$ bezeichnet werden. Dann ist nach den obigen Betrachtungen $q+m$ auch die Anzahl der Querschnitte, welche die $Q_1$ in $T_2$ bilden. Nun ist der Annahme nach $T_1$ eine einzige einfach zusammenhängende Fläche, welche durch $q+m$ Querschnitte in das Flächensystem $\mathfrak{T}$ verwandelt wird, mithin besteht $\mathfrak{T}$ aus $q+m+1$ getrennten und für sich einfach zusammenhängenden Theilen (§ 48. V). Dasselbe System wird aber auch aus $T_2$ durch $q+m$ Querschnitte erzeugt; also hat die aus einem Stücke bestehende Fläche $T_2$ die Eigenschaft, dass sie durch $q+m$ Querschnitte in $q+m+1$ getrennte und für sich einfach zusammenhängende Theile zerlegt wird. Nach § 48, IX ist demnach $T_2$ wirklich einfach zusammenhängend.

Hierauf beruht nun eine Classification der Flächen und die nähere Bestimmung der Ordnung ihres Zusammenhanges.

Ist eine Fläche mehrfach zusammenhängend, so kann in ihr nach § 48, II ein Querschnitt gezogen werden, der sie nicht zerstückt. Wenn nun der Fall eintritt, dass sie nach Anbringung dieses ersten Querschnittes einfach zusammenhängend geworden ist, so verwandelt nach dem letzten Satze jeder die Fläche nicht zerstückende Querschnitt dieselbe in eine einfach zusammenhängende. In diesem Falle heisst die Fläche zweifach zusammenhängend.

Ist die Fläche aber, nachdem der erste Querschnitt gezogen wurde, noch mehrfach zusammenhängend, so kann ein neuer, nicht zerstückender Querschnitt gezogen werden. Bringt dieser die Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche zu Stande, so wird dasselbe durch irgend zwei andere nicht zerstückende Querschnitte geleistet, und die Fläche heisst dann dreifach zusammenhängend.

Ist die Fläche auch nach Anbringung des zweiten Querschnittes noch mehrfach zusammenhängend, so kann wieder ein nicht zerstückender Querschnitt gezogen werden, und je nachdem die Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche durch drei, vier etc. Querschnitte zu Stande kommt, heisst die Fläche vierfach, fünffach etc. zusammenhängend.

Im Allgemeinen wird eine Fläche $(q+1)$fach zusammenhängend genannt, wenn sie durch $q$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt werden kann; und dann ist es ganz gleichgültig, wie die Querschnitte gezogen werden, wenn nur keiner derselben die Fläche zerstückt. Ist die Fläche aber einmal einfach zusammenhängend geworden, so ist es nach § 48, IV nicht mehr möglich, in ihr einen sie nicht zerstückenden Querschnitt zu ziehen.

## § 51.

Es mögen nun einige Sätze theils über Aenderung oder Nicht-Aenderung der Ordnung des Zusammenhanges, theils über Randcurven folgen.

I. Durch jeden eine Fläche nicht zerstückenden Querschnitt wird die Ordnung ihres Zusammenhanges um Eins erniedrigt. — Denn ist die Fläche $(q+1)$fach zusammenhängend, so folgt aus dem zweiten Satze des § 50, dass, wie der erste nicht zerstückende Querschnitt auch gezogen sein mag, die Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche stets durch $q-1$ Querschnitte zu Stande kommt, die neue Fläche also $q$-fach zusammenhängend ist.

II. Zieht man von einem Punkte $a$ der Begrenzung aus in das Innere der Fläche eine, sich selbst nicht treffende Linie, die in einem Punkte $c$ im Innern der Fläche endet, so ändert eine solche Linie die Ordnung des Zusammenhanges nicht.

Beweis. Die ursprüngliche Fläche heisse $T$, die durch die Linie $ac$ abgeänderte $T'$. Zunächst ist klar, dass, wenn $T$ einfach zusammenhängend ist, $T'$ es auch sein muss; denn wenn in $T$ jede geschlossene Linie für sich einen Theil vollständig begrenzt, so gilt dasselbe auch von jeder geschlossenen, in $T'$ verlaufenden

Linie, d. h. einer solchen, die $ac$ nicht überschreitet. Sei also $T$ mehrfach, und zwar $(q+1)$ fach zusammenhängend. Dann kann in $T$ stets ein die Fläche nicht zerstückender Querschnitt gezogen werden (§ 48, II). Sei $\alpha\beta$ ein solcher, und denken wir uns denselben so gezogen, dass er durch den Punkt $c$ hindurchgeht. Das ist immer möglich, denn zieht man ihn nach Anleitung von § 48, II mit Hülfe einer geschlossenen Linie, die für sich allein nicht eine vollständige Begrenzung bildet, so kann man ihn von dieser aus nach beiden Seiten an den Rand der Fläche auf ganz beliebige Weise und also auch stets über den Punkt $c$ führen. Durch diesen Punkt wird nun der Querschnitt $\alpha\beta$ in zwei Theile $c\alpha$ und $c\beta$ getheilt, der Art, dass von diesen beiden Theilen mindestens einer mit $ac$ zusammen in $T$ einen nicht zerstückenden Querschnitt bildet. Es sei $c\alpha$ dieser Theil, und die durch den nicht zerstückenden Querschnitt $ac\alpha$ aus $T$ entstehende Fläche heisse $T''$. Dann ist diese $q$-fach zusammenhängend (I). Allein $T''$ entsteht auch aus $T'$ durch Ziehen der Linie $c\alpha$, und diese bildet in $T'$ einen nicht zerstückenden Querschnitt. Mithin hat $T'$ die Eigenschaft, dass sie durch einen nicht zerstückenden Querschnitt in eine $q$-fach zusammenhängende Fläche übergeht; also ist $T'$, wie auch $T$ es war, $(q+1)$ fach zusammenhängend.

Anmerkung. Dieser Satz bleibt vollkommen gültig, wenn der innere Punkt $c$ ein Verzweigungspunkt ist.

III. Nimmt man in einer Fläche $T$ irgendwo einen einzelnen Punkt $c$ heraus, so wird dadurch die Ordnung des Zusammenhanges um Eins erhöht.

Beweis. Die durch Herausnahme des Punktes $c$ abgeänderte Fläche heisse $T'$. Man verbinde $c$ mit irgend einem Punkte $a$ der Begrenzung von $T$*) durch eine sich selbst nicht schneidende Linie und erzeuge dadurch eine neue Fläche $T''$. Dann kann die letztere auch aus $T$ dadurch entstanden gedacht werden, dass in dieser die Linie $ac$ gezogen ist, die von einem Begrenzungspunkte $a$ ausgehend in einem inneren Punkte $c$ endet, und folglich ist $T''$ mit $T$ von gleicher Ordnung (II). In $T'$ dagegen ist $ac$ ein Querschnitt, und zwar ein nicht zerstückender, da man um $c$ herum von der einen Seite auf die andere kommen kann. Mithin ist $T'$ nach I von einer um Eins höheren Ordnung als $T''$, und also auch als $T$.

Anmerkung. Das Vorige verliert seine Gültigkeit nicht, wenn der herausgenommene Punkt ein Verzweigungspunkt ist.

---

*) Ist $T$ eine geschlossene Fläche, so wird nach § 46 angenommen, dass sie bereits einen Begrenzungspunkt $a$ besitzt.

IV. Wird in einer Fläche irgendwo eine geschlossene Linie gezogen, welche für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächentheiles bildet, der entweder keinen oder höchstens einen Verzweigungspunkt (beliebig hoher Ordnung (§ 13)) enthält, und wird dann der so begrenzte Theil aus der Fläche ausgeschieden, so wird dadurch die Ordnung des Zusammenhanges um Eins erhöht. — Denn in Beziehung auf die Ordnung des Zusammenhanges kann sich nichts ändern, wenn die die auszuscheidende Stelle begrenzende Randcurve sich mehr und mehr zusammenzieht. Schrumpft sie aber zuletzt in einen Punkt zusammen, so hat man den vorigen Fall. Dieser Satz gilt daher, wenn die auszuscheidende Stelle entweder keinen oder nur einen Verzweigungspunkt enthält. Enthält sie aber mehr als einen, so würde es nicht mehr möglich sein, die Randcurve in einen Punkt sich zusammenziehen zu lassen; und dann ist der Satz auch nicht mehr in allen Fällen gültig.

Zusatz. Bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche hat man nach § 46 irgendwo einen Begrenzungspunkt zu supponiren. Dieser darf auch selbst ein Verzweigungspunkt sein. Wird nun aus einer solchen Fläche ein Stück ausgeschieden, das diesen Begrenzungspunkt, ausserdem aber keinen Verzweigungspunkt enthält, so ändert sich die Ordnung des Zusammenhanges nicht. — Denn man kann die die auszuscheidende Stelle begrenzende Randcurve in diesem Falle in den Begrenzungspunkt sich zusammenziehen lassen und erhält dann die ursprüngliche Fläche wieder.

V. Wenn eine $(q+1)$fach zusammenhängende Fläche durch $m$ Querschnitte in zwei getrennte Theile zerlegt wird, von denen der eine $S$ einfach zusammenhängend ist, so ist der andere, der $T'$ heisse, $(q-m+2)$fach zusammenhängend, d. h. er erfordert nur noch $q-(m-1)$ Querschnitte zur Umwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche.

Beweis. Sei $x$ die Anzahl der Querschnitte, welche $T'$ in eine einfach zusammenhängende Fläche $T_0'$ verwandeln. Führt man diese Schnitte aus, so erhält man durch $m+x$ Querschnitte zwei einfach zusammenhängende Flächen $T_0'$ und $S$. Wird aber die ursprüngliche Fläche zuerst durch $q$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt, und dann diese durch einen weiteren Querschnitt in zwei getrennte Theile getheilt, so hat man wieder zwei einfach zusammenhängende Flächen, hervorgebracht durch $q+1$ Querschnitte. Nach dem Hauptsatze § 49 ist dann

$$(m+x)-2=(q+1)-2$$

also

$$x=q-(m-1).$$

VI. Wenn eine aus einem Stück bestehende Fläche mehr als eine Randcurve besitzt, d. h. wenn ihre Begrenzung aus mehreren von einander getrennten geschlossenen Linien besteht, so ist sie mehrfach zusammenhängend.

Beweis. Sind $a$ und $b$ zwei auf verschiedenen Randcurven liegende Punkte, so kann man, da die Fläche in sich zusammenhängt, von $a$ durch das Innere der Fläche nach $b$ eine Linie ziehen. Diese ist ein Querschnitt, der aber die Fläche nicht zerstückt, denn man kann längs einer der beiden Randcurven im Innern der Fläche von der einen Seite des Querschnittes auf die andere Seite kommen. Da es also möglich ist, in der Fläche einen sie nicht zerstückenden Querschnitt zu ziehen, so ist die Fläche nach § 48, I mehrfach zusammenhängend.

VII. Hieraus folgt: Eine einfach zusammenhängende Fläche besitzt immer nur eine einzige Randcurve, d. h. ihre Begrenzung kann in einem ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden. (Oder aber ihre Begrenzung besteht nur aus einem einzigen Punkte.) — Wenn daher eine mehrfach zusammenhängende Fläche durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt worden ist, wobei dann die Querschnitte zu der ursprünglich vorhandenen Begrenzung als neue Begrenzungsstücke hinzugekommen sind, so müssen sie sammt der ursprünglichen Begrenzung in einem ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden können. Dabei bildet jeder Querschnitt gleichzeitig die Begrenzung für jeden der auf beiden Seiten an ihn anstossenden Flächentheile. Wird also die ganze Begrenzung in positiver Richtung durchlaufen, so dass das begrenzte Gebiet stets zur Linken der Begrenzung liegt, so muss jeder Querschnitt zwei Mal und zwar in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden. (Vgl. Fig. 25, 42, 43, 44 pag. 161.)

VIII. Durch jeden Querschnitt wird die Anzahl der vorhandenen Randcurven entweder um eine vermehrt oder um eine vermindert.

Beweis. Nach den Erörterungen des § 47 bildet ein Querschnitt immer zugleich zwei Begrenzungsstücke, indem er die auf beiden Seiten an ihn anstossenden Flächentheile gleichzeitig begrenzt. Es giebt nun nach § 47 drei Arten von Querschnitten:

1) Der Querschnitt verbindet zwei Punkte $a$ und $b$ der nämlichen Randcurve. Diese wird dann durch die Punkte $a$, $b$ in zwei Theile getheilt, und es bildet der eine Theil mit dem einen Rande des Querschnitts eine Randcurve, der andere Theil mit dem anderen Rande eine zweite. Aus einer Randcurve entstehen

also zwei; es tritt eine Vermehrung der Randcurven um eine ein.*)

2) Der Querschnitt verbindet zwei Punkte, die auf verschiedenen Randcurven liegen. Dann vereinigt er diese zu einer einzigen, indem seine beiden Ränder den Zusammenhang herstellen. Aus zwei Randcurven entsteht also eine; es tritt eine Verminderung der Randcurven um eine ein.

3) Der Querschnitt beginnt in einem Randpunkte und endigt in einem Punkte seines früheren Laufes. Dann bildet sein einer Rand mit der Randcurve, von der er ausgeht, zusammen eine einzige geschlossene Begrenzungslinie. Ausserdem aber bildet der innere Rand seines geschlossenen Theiles eine neue Randcurve, sodass eine Vermehrung der Randcurven um eine eintritt.

IX. Wenn eine geschlossene Fläche (die also nur einen Begrenzungspunkt besitzt) mehrfach zusammenhängend ist, jedoch durch eine endliche Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann, so ist die Anzahl der dazu erforderlichen Querschnitte stets eine gerade Zahl.

Beweis. Die gegebene Fläche sei $(q+1)$fach zusammenhängend, sodass $q$ Querschnitte sie in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Da die Fläche ursprünglich nur einen einzigen Begrenzungspunkt besitzt, so ist die Anzahl ihrer Randcurven gleich 1. Diese Zahl wird durch jeden Querschnitt nach VIII entweder um Eins vergrössert oder um Eins verkleinert. Sei $p$ die Anzahl der Querschnitte, welche eine Vermehrung, also $q-p$ die Anzahl derjenigen, welche eine Verminderung der Randcurven hervorbringen; dann ist die Anzahl der Randcurven am Ende gleich $1+p-(q-p)$. Aber da dann die Fläche einfach zusammenhängend ist, so besitzt sie wieder nur eine einzige Randcurve (VII), mithin hat man die Gleichung

$$1+p-q+p=1,$$

aus welcher

$$q=2p$$

folgt. Demnach ist $q$ eine gerade Zahl.

## § 52.

Wenn man bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche die Anzahl ihrer Blätter, sowie ihre Verzweigungspunkte kennt, so kann man die Ordnung ihres Zusammenhanges angeben. Wir

*) Dies erleidet keine Aenderung, wenn die Punkte $a$ und $b$ zusammenfallen.

machen hiebei Gebrauch von der § 13 erwähnten Auffassungsweise, nach welcher man einen Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung betrachten kann als entstanden durch das Zusammenfallen von $m-1$ einfachen Verzweigungspunkten. Ist in diesem Sinne $g$ die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte, $n$ die Anzahl der Blätter und $q$ die Anzahl der Querschnitte, welche die Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandeln, so kann man zwischen diesen drei Zahlen eine Beziehung finden.*)

Es sei $A_0$ der in der geschlossenen Fläche zu supponirende Begrenzungspunkt. Wir nehmen nun noch andere $n-1$ Punkte $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ aus der Fläche heraus, und zwar aus jedem der übrigen $n-1$ Blätter einen; am einfachsten denken wir uns diese $n$ Punkte gerade unter einander liegend. Da nun durch die Herausnahme jedes solchen Punktes die Ordnung des Zusammenhanges um Eins steigt (§ 51, III), so wird diese Ordnung im Ganzen um $n-1$ erhöht. Nach Herausnahme der $n-1$ Punkte $A_1$, $A_2$ $\ldots A_{n-1}$ sind also $q+n-1$ Querschnitte zur Verwandlung in eine einfach zusammenhängende Fläche erforderlich. In dieser $(q+n)$fach zusammenhängenden Fläche ziehen wir nun Querschnitte auf folgende Art. Aus jedem Punkte $A$ ziehe man Linien nach allen den Verzweigungspunkten, die mit $A$ in demselben Blatte liegen. Dann entstehen in der That Querschnitte, wenn man sich erinnert, dass man durch einen Verzweigungspunkt in alle diejenigen Blätter gelangen kann, die in diesem Punkte mit einander verbunden sind. Liegen nun zwei Punkte $A_h$ und $A_k$ in zwei Blättern, die in einem einfachen Verzweigungspunkte $a$ zusammenhängen, so bilden $A_h a$ und $a A_k$ zusammen eine Linie, die von einem Begrenzungspunkte $A_h$ durch das Innere der Fläche nach einem Begrenzungspunkte $A_k$ führt, also einen Querschnitt. Ist dagegen $a$ ein Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung, in welchem die $m$ Blätter zusammenhängen, die etwa die Punkte $A_1, A_2 \ldots A_m$ enthalten, so ist nun wieder zunächst etwa $A_1 a A_2$ ein Querschnitt, sodann aber bilden die Linien $aA_3$, $aA_4 \ldots aA_m$ noch $m-2$ andere Querschnitte, sodass man hier im Ganzen $m-1$ Querschnitte erhält, eben so viele, als einfache Verzweigungspunkte in $a$ vereinigt sind. Wenn auf diese Art mit allen Verzweigungspunkten verfahren wird, so erhält man genau so viele Querschnitte, als einfache Verzweigungspunkte vorhanden sind, also $g$. Durch diese $g$ Querschnitte zerfällt nun aber die Fläche in $n$ getrennte Theile, die für sich einfach zusammenhängend sind. Es werden nämlich dadurch gewissermassen die $n$ Blätter der Fläche von einander

*) Vergl. zu dem Folgenden: *Roch*, Ueber Functionen complexer Grössen. *Schlömilch's* Zeitschr. f. Math. Bd. 10 pag. 177.

getrennt. Denn sind $p_h$ und $p_k$ zwei in irgend zwei Blättern über einander liegende Punkte, so kann man von $p_h$ nach $p_k$ nicht anders gelangen, als wenn Verzweigungsschnitte überschritten und Verzweigungspunkte umwunden werden; letzteres aber wird durch die angebrachten Querschnitte unmöglich gemacht. Je zwei solche Punkte $p_h$ und $p_k$ liegen also stets in getrennten Theilen. Eine Ausnahme davon machen nur die Punkte $A$ selbst. Von irgend einem Punkte $A$ kann man durch Ueberschreitung eines Verzweigungsschnittes allemal zu einem anderen Punkte $A$ gelangen. Es werden also die $n$ Blätter der Fläche in der Art von einander getrennt, dass in jedem Blatte ein durch zwei in dem Punkte $A$ zusammenstossende Querschnittstheile gebildeter Zipfel (oder auch mehrere solche Zipfel) aus dem Blatte ausgeschieden wird, und dafür ein entsprechender Zipfel eines anderen Blattes an dessen Stelle tritt. Die Fläche besteht demnach jetzt wirklich aus $n$ getrennten Theilen. Jeder dieser Theile ist aber noch für sich zusammenhängend, denn da er im Unendlichen geschlossen ist, so besteht seine Begrenzung lediglich aus den in dem Punkte $A$ zusammenstossenden Querschnittstheilen. Aus demselben Grunde ist auch jeder Theil für sich einfach zusammenhängend, da man bei jeder in ihm gezogenen geschlossenen Linie nur auf der einen Seite an jene Begrenzung gelangen kann, jede geschlossene Linie also eine vollständige Begrenzung bildet. Die gegebene Fläche wird nun also nach Herausnahme der $n-1$ Begrenzungspunkte $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ durch $g$ Querschnitte in $n$ getrennte und für sich einfach zusammenhängende Theile zerlegt. Nun war aber diese Fläche $(q+n)$fach zusammenhängend, es sind also $q+n-1$ Querschnitte erforderlich, um sie in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Soll diese nun noch in $n$ getrennte Theile zerlegt werden, so sind dazu noch weitere $n-1$ Querschnitte erforderlich (§ 48, V); mithin geschieht diese Zerlegung durch $q+2(n-1)$ Querschnitte; dieselbe Zahl war vorhin gleich $g$, also hat man nach dem Hauptsatze § 49

$$g = q + 2(n-1) \qquad \text{oder} \qquad q = g - 2(n-1).$$

Vergleichen wir hiemit die hiehergehörigen in § 46 gegebenen Beispiele, so ist in dem dritten $n = 2$, $g = 2$; demnach wird $q = 0$, und es bestätigt sich, dass diese Fläche einfach zusammenhängend ist. In dem fünften Beispiele war $n = 2$, $g = 4$, also ist hier $q = 2$, und die Fläche dreifach zusammenhängend.

Aus dem gewonnenen Resultate lassen sich noch einige Folgerungen ziehen. Da nämlich in einer geschlossenen Fläche $q$ stets eine gerade Zahl ist (§ 51, IX), so muss auch $g$ eine solche sein.

Eine im Unendlichen geschlossene Fläche besitzt daher stets eine gerade Anzahl einfacher Verzweigungspunkte. Der einfachste Fall bei einer $n$-blättrigen Fläche wäre der, dass zwei Windungspunkte $(n-1)$ter Ordnung vorhanden sind; und wenn dies der Fall ist, so ist die Fläche einfach zusammenhängend.

Eine weitere Folgerung, die sich aus dem Vorigen ergiebt, ist die, dass eine Fläche, welche dazu dient, die Werthe einer algebraischen Function so zu vertheilen, dass diese eine eindeutige Function des Ortes in der Fläche wird (§ 12), stets eine endliche Ordnung des Zusammenhanges besitzt, also durch eine endliche Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden kann. Denn eine solche Fläche besitzt stets eine endliche Anzahl von Blättern und eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten, es sind daher $n$ und $g$ endliche Zahlen, mithin ist auch $q$ eine endliche Zahl.

## § 53.

Aus dem Ergebnisse des vorigen § lässt sich auch eine Beziehung ableiten, die bei einer nicht geschlossenen Fläche stattfindet zwischen der Ordnung des Zusammenhanges, der Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte und der Anzahl der Umläufe, welche die Begrenzung der Fläche macht.

Wir gehen von einer im Unendlichen geschlossenen Fläche aus. Diese sei $(q'+1)$fach zusammenhängend, $g'$ sei die Anzahl ihrer einfachen Verzweigungspunkte und $n$ die ihrer Blätter. Dann hat man nach dem vorigen §

$$q' = g' - 2(n-1).$$

Wir wollen nun den in der Fläche zu supponirenden Begrenzungspunkt in dem unendlich fernen Punkte eines Blattes liegend annehmen und zunächst voraussetzen, dass in keinem Blatte der unendlich ferne Punkt ein Verzweigungspunkt sei. Scheidet man dann aus jedem Blatte ein Stück aus, das den unendlich fernen Punkt, aber keinen Verzweigungspunkt enthält und daher von einer einfach in sich zurücklaufenden Curve begrenzt ist, so wächst die Ordnung der Fläche für jede dieser ausgeschiedenen Stellen um Eins, mit Ausnahme derjenigen, welche den supponirten Begrenzungspunkt enthält (§ 51, IV). Im Ganzen wird daher die Ordnung des Zusammenhanges um $n-1$ erhöht. Ist also die neue Fläche $(q+1)$fach zusammenhängend, so hat man $q = q' + n - 1$ und demnach

$$q = g' - n + 1.$$

Nachdem nun aber die unendlich fernen Punkte aus der Fläche ausgeschieden sind, kann man die Blätter derselben, welche früher als unendlich grosse Kugelflächen zu betrachten waren, wieder in der Ebene ausgebreitet denken. Jedes Blatt erscheint dann von einer einfach in sich zurücklaufenden Randcurve begrenzt, welche, wenn sie in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen wird, einen positiven Umlauf macht. Bedeutet also $U$ die Anzahl der Umläufe der Begrenzung, so ist $U = n$. Die Anzahl $g$ der in der neuen Fläche enthaltenen einfachen Verzweigungspunkte ist der früheren Zahl $g'$ gleich, da der Annahme nach kein Verzweigungspunkt ausgeschieden wurde. Man erhält daher aus der vorigen Gleichung

$$q = g - U + 1.$$

Dies ist die oben erwähnte Beziehung, und man kann nun zeigen, dass diese allgemein gilt und sich nicht ändert, welchen Modificationen man auch die Fläche unterwerfen mag.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass in der ursprünglichen Fläche in einem unendlich fernen Punkte $m$ Blätter zusammenhängen, also $m - 1$ einfache Verzweigungspunkte in ihm vereinigt sind. Dann beträgt die Anzahl der ausgeschiedenen Flächentheile nicht mehr $n$ wie vorhin, sondern da einer derselben von einer den Verzweigungspunkt $m$ Mal umgebenden Linie begrenzt wird und daher die Stelle von $m$ der früheren einnimmt, nur noch $n - m + 1$. Unter diesen bringt derjenige wieder keine Erhöhung der Ordnung des Zusammenhanges hervor, welcher den supponirten Begrenzungspunkt enthielt; die Erhöhung der Ordnung beträgt also $n - m$, oder es ist $q = q' + n - m$, d. i.

$$\begin{aligned} q &= g' - 2(n-1) + n - m \\ &= g' - m + 1 - n + 1. \end{aligned}$$

Bei der Ausbreitung der Blätter in die Ebene ist nun die Anzahl der Umläufe $U$ wieder gleich $n$, denn es ändert sich nur das, dass die $n$ Randcurven nicht mehr alle von einander getrennt verlaufen, sondern dass $m$ unter ihnen zu einer einzigen vereinigt sind, die nun aber $m$ Umläufe macht. Dagegen sind jetzt mit den unendlich fernen Punkten zugleich $m - 1$ einfache Verzweigungspunkte aus der Fläche ausgeschieden, also ist jetzt $g = g' - m + 1$. Setzt man dies ein, so erhält man wieder wie oben

$$q = g - U + 1.$$

Die nun in der Ebene ausgebreitete $n$-blättrige Fläche modificiren wir jetzt dadurch, dass wir im Innern Stellen ausscheiden. Betrachten wir zuerst eine geschlossene Linie, die einen Flächentheil begrenzt, der keinen Verzweigungspunkt enthält, und denken

diesen Flächentheil ausgeschieden. Dann wächst zunächst $q$ um $+1$ (§ 51, IV). Die neue Randcurve aber muss, wenn ihre Begrenzungsrichtung die positive sein soll, in der Richtung der abnehmenden Winkel durchlaufen werden. Versteht man daher jetzt im Allgemeinen unter der Anzahl der positiven Umläufe die positive oder negative Zahl $U$, welche entsteht, wenn man die Anzahl der Umläufe in der Richtung der abnehmenden Winkel subtrahirt von der Anzahl der Umläufe in der Richtung der wachsenden Winkel, so muss in dem vorliegenden Falle die Zahl $U$ um $-1$ vermehrt werden. Gleichzeitig ist $q$ um $+1$ zu vermehren, also bleibt die obige Beziehung ungeändert.

Besteht die Fläche z. B. aus einem Blatte, so ist $q = 0$, wird sie ferner begrenzt von einer äusseren Linie und $k$ kleineren Kreisen, die von der ersteren umschlossen werden, so macht bei positiver Begrenzungsrichtung jene einen Umlauf in der Richtung der wachsenden Winkel, jeder der inneren Kreise einen Umlauf in entgegengesetzter Richtung; folglich ist

$$U = 1 - k$$

und man erhält

$$q = k - 1 + 1 = k,$$

die Anzahl der Querschnitte ist gleich der Anzahl der inneren Kreise.

Wird zweitens ein Flächentheil ausgeschieden, der einen Verzweigungspunkt $(m-1)$ter Ordnung enthält, dessen Begrenzungslinie also $m$ Umläufe macht, so wächst wieder $q$ um $+1$ (§ 51, IV), sodann $U$ um $-m$, gleichzeitig aber auch $g$ um $-(m-1)$, also $g - U$ um $+1$; die obige Beziehung bleibt also wieder dieselbe.

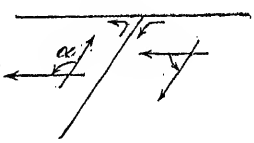
Die betrachtete Fläche hat nach den bisher angebrachten Modificationen die Beschaffenheit, dass die äusseren Randcurven alle im Endlichen liegenden Verzweigungspunkte umgeben und dass im Innern Lücken vorkommen, jedoch von der Art, dass jeder der ausgeschiedenen Flächentheile entweder keinen oder nur einen Verzweigungspunkt (beliebiger Ordnung) enthielt. Wir haben nun zu untersuchen, ob die obige Beziehung eine andere wird, wenn entweder die äusseren Randcurven nicht mehr alle endlichen Verzweigungspunkte umgeben, oder innere Randcurven die Begrenzungen von ausgeschiedenen Flächentheilen bilden, in denen mehr als ein Verzweigungspunkt enthalten war. Beides kommt darauf hinaus, den Fall zu untersuchen, dass von der Fläche ein an einem (äusseren oder inneren) Rande liegender Flächentheil abgetrennt wird, der einen Verzweigungspunkt $(m-1)$ter Ordnung enthält, und von dem man unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen kann, dass sich in ihm keine Lücken befinden. Dabei erleidet nun

zunächst die Zahl $U$ keine Aenderung. Denn bei dem Austreten des Verzweigungspunktes aus der Fläche werden entweder Randcurven, die früher in verschiedenen Blättern getrennt verliefen, in Zusammenhang gesetzt, oder zusammenhängende Randcurven werden getrennt, oder endlich die Art, wie die Randcurven unter einander zusammenhängen, wird nach dem Austreten des Verzweigungspunktes eine andere als vorher. In allen diesen Fällen bleiben aber die Umläufe der Randcurven dieselben. Soll nun der erwähnte Flächentheil abgetrennt werden, so muss dies, da er am Rande liegt, durch Querschnitte geschehen; und damit er wirklich einen getrennten Theil bilde, muss er in allen seinen $m$ Blättern durch eine oder mehrere geschlossene Linien vollständig begrenzt sein. Allein eine Linie, welche den Verzweigungspunkt umgiebt, kann sich erst dann schliessen, wenn sie alle $m$ Blätter durchlaufen hat, schliesst sie sich aber auf diese Weise, so begrenzt sie den Flächentheil vollständig. Daher kann die Begrenzung desselben nicht anders als aus einer solchen geschlossenen Linie bestehen. Demnach muss es möglich sein, die Ablösung des in Rede stehenden Flächentheiles dadurch zu bewerkstelligen, dass man in der ursprünglichen Fläche $m$ Querschnitte zieht, welche sich mit den $m$ dem abzulösenden Flächenstücke angehörigen Randtheilen zu einer einzigen geschlossenen Linie verbinden. Denn wenn dies nicht möglich wäre, so wäre es auch nicht möglich, den in Rede stehenden Flächentheil abzulösen, und man könnte also auch nicht die Randcurven so abändern, dass ein Verzweigungspunkt aus der Fläche heraustritt. Da nun das abgelöste Stück von einer einzigen den Windungspunkt $m$ Mal umgebenden Linie begrenzt ist, so ist es einfach zusammenhängend (§ 46, Beisp. 2), und dieses einfach zusammenhängende Stück ist von der ursprünglichen Fläche durch $m$ Querschnitte abgelöst. Mithin ist bei der übrigbleibenden Fläche die Ordnung des Zusammenhanges um $m - 1$ kleiner geworden (§ 51, V), oder $q$ ist um $m - 1$ zu vermindern; da aber wegen des ausgeschiedenen Windungspunktes $(m-1)$ter Ordnung auch $g$ um $m-1$ zu vermindern ist, $U$ dagegen ungeändert bleibt, so ändert die obige Beziehung sich nicht.

Schliesslich betrachten wir noch den Fall, dass die Begrenzung der Fläche durch nicht zerstückende Querschnitte abgeändert wird. Hiebei lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die Richtungsänderung, welche die Linien erfahren, und bemerken, dass eine Linie dann einen positiven Umlauf macht, wenn sie im Ganzen eine Richtungsänderung um $2\pi$ erfährt. Ist nun in der Fläche ein nicht zerstückender Querschnitt gezogen, so bildet dieser gleichzeitig zwei Begrenzungsstücke, die bei Einhaltung der positiven Begrenzungsrichtung zwei Mal in entgegengesetztem Sinne zu durch-

laufen sind. Da wo der Querschnitt in einen Begrenzungstheil der Fläche einmündet, erfährt die Begrenzungsrichtung eine plötzliche Aenderung. Sei $\alpha$ der Winkel, um welchen sich die Richtung ändert (Fig. 47). (Es kann allerdings auch der Fall eintreten, dass der Querschnitt ohne plötzliche Richtungsänderung in den Begrenzungstheil übergeht; dieser Fall ordnet sich aber dem vorigen unter, indem dann $\alpha = 0$ anzunehmen ist.) Beim Durchlaufen des Begrenzungsstückes, welchem der Querschnitt als ein Theil angehört, kommt man nun aber, da der Querschnitt zwei Mal durchlaufen werden muss, noch einmal an die vorige Stelle zurück, und zwar wird dann der Querschnitt in entgegengesetzter Richtung, der anstossende ursprüngliche Begrenzungstheil aber in der nämlichen Richtung wie früher durchlaufen. Daraus folgt, dass die Begrenzungsrichtung jetzt eine plötzliche Aenderung erfährt, die gleich dem Winkel $\pi - \alpha$ ist. Demnach verursacht der Endpunkt des Querschnittes im Ganzen eine Richtungsänderung von $\pi$. Dasselbe gilt von dem anderen Endpunkte des Querschnittes. (Auch dann, wenn dieser in einem Punkte seines früheren Laufes endet, indem dann nur bei der vorigen Betrachtung der Querschnitt selbst an die Stelle der ursprünglichen Begrenzungslinie tritt.) Demnach bringt der Querschnitt an seinen Endpunkten eine Richtungsänderung um $2\pi$ hervor. Dagegen fällt die Richtungsänderung, welche der Querschnitt während seines Laufes etwa erfährt, ganz ausser Betracht, da diese bei dem zweiten in entgegengesetztem Sinne erfolgenden Durchlaufen wieder aufgehoben wird. Sonach vermehrt jeder nicht zerstückende Querschnitt die Zahl $U$ der positiven Umläufe um $+1$; gleichzeitig wird durch ihn aber die Ordnung des Zusammenhanges um Eins vermindert (§ 51, I), also erfährt $q$ eine Vermehrung um $-1$; mithin bleibt auch in diesem Falle die obige Beziehung bestehen.

Fig. 47.




Man sieht also, dass die Gleichung

$$q = g - U + 1$$

ganz allgemein für beliebige in der Ebene ausgebreitete Flächen gilt. Mit ihrer Hülfe kann man den Zusammenhang einer Fläche sofort angeben, sobald man ihre Begrenzung und ihre Verzweigungspunkte kennt.

Wenn die Fläche einfach zusammenhängend ist, also $q = 0$, so giebt die vorige Gleichung

$$U = g + 1.$$

Erinnert man sich zugleich, dass eine einfach zusammenhängende

Fläche immer nur eine Randcurve besitzt (§ 51, VII), so hat man den Satz, den wir für einen speciellen Fall schon § 13 bestätigt fanden: **Bei einer einfach zusammenhängenden Fläche ist die Anzahl der Umläufe ihrer Begrenzungscurve um Eins grösser, als die Anzahl der in ihrem Inneren liegenden einfachen Verzweigungspunkte.** Nach den obigen Erörterungen gilt dieser Satz auch dann noch, wenn die einfach zusammenhängende Fläche durch Ziehen von Querschnitten aus einer mehrfach zusammenhängenden entstanden ist. Doch ist zu seiner Gültigkeit erforderlich, dass die Fläche in der Ebene ausgebreitet sei.

# Zehnter Abschnitt.

## Von den Periodicitätsmoduln.*)

### § 54.

Es bedeute $f(z)$ eine beliebige algebraische Function. Denken wir uns als das Gebiet der Veränderlichen $z$ eine aus so vielen Blättern bestehende und mit solchen Verzweigungspunkten behaftete Fläche, wie es die Natur dieser Function $f(z)$ erheischt. Die Unstetigkeitspunkte derselben umgeben wir mit kleinen geschlossenen Linien und schliessen sie dadurch aus. Vorläufig wollen wir annehmen, dass dies mit allen Unstetigkeitspunkten geschehen sei, wir werden aber sehr bald sehen, dass gewisse Arten von Unstetigkeitspunkten nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Die so entstehende Fläche nennen wir die Fläche $T$. Diese besitzt nun eine endliche Ordnung des Zusammenhanges und kann also, wenn sie mehrfach zusammenhängend ist, durch eine endliche Anzahl von Querschnitten in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt werden. Denn dies ist, da die zu Grunde liegende Function eine algebraische ist, nach § 52 jedenfalls vor Ausschliessung der Unstetigkeitspunkte der Fall. Bei jedem dieser Punkte aber wird durch seine Ausschliessung die Ordnung der Fläche um Eins er-

*) Zur Erläuterung der in diesem Abschnitte enthaltenen allgemeinen Betrachtungen kann die in § 22 und 23 angestellte specielle Untersuchung des Logarithmus und der Exponentialfunction dienen. Weitere Beispiele finden sich in § 57.

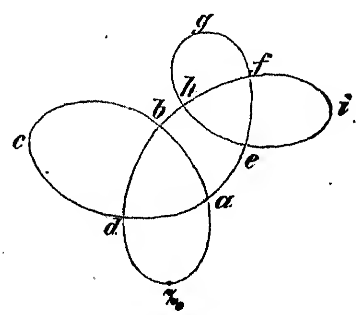
höht (§ 51, IV). Da nun eine algebraische Function nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten besitzt, so bleibt die Ordnung des Zusammenhanges auch nach Ausschliessung der Unstetigkeitspunkte endlich. Ist demgemäss die Fläche $T$ mehrfach zusammenhängend, so verwandeln wir sie durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende, welche mit $T'$ bezeichnet werden möge. Alsdann bildet innerhalb $T'$ jede geschlossene Linie die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, in welchem $f(z)$ endlich und stetig ist. Bildet man daher die Integralfunction

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

indem man von einem beliebigen festen Anfangspunkte $z_0$ aus längs eines beliebigen, ganz innerhalb $T'$ liegenden Weges bis zu einem Punkte $z$ integrirt, so machen irgend zwei solche Wege vereinigt eine geschlossene Linie aus, die einen Flächentheil vollständig begrenzt, in welchem $f(z)$ überall stetig ist, und folglich erlangt $w$ auf allen solchen Wegen in $z$ denselben Werth (§ 18). Demnach ist $w$ eine Function der oberen Grenze $z$, die innerhalb $T'$ überall eindeutig bleibt.*)

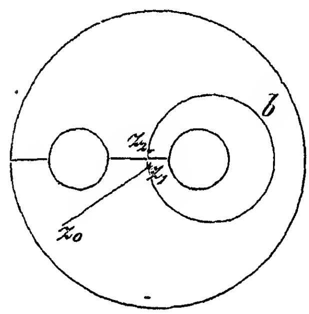
*) Das Obige erleidet keine Ausnahme, wenn zwei Wege zusammengenommen eine geschlossene Linie bilden, welche sich selbst durchschneidet. Denn man kann eine solche immer in mehrere einfach geschlossene, d. h. einfach in sich zurücklaufende Linien zerlegen. (Vgl. Fig. 48.) Dies geschieht dadurch, dass man jedesmal, wenn man, von einem beliebigen Punkte $z_0$ aus die Linie durchlaufend, an einen schon einmal überschrittenen Punkt (z. B. $a$) zurückgelangt und also eine einfach geschlossene Linie (z. B. $abcda$) durchlaufen hat, diese ausscheidet und den folgenden Weg (z. B. $ae$) als die Fortsetzung des dem ausgeschiedenen Theile vorhergehenden Stückes ($z_0 a$) betrachtet. Wiederholt man dies, so oft es vorkommt, so bleibt als Rest zuletzt eine ebenfalls einfach geschlossene Linie übrig, und die gegebene Linie wird auf diese Art in mehrere einfach geschlossene Linien zerlegt. (In der Figur sind die auszuscheidenden Linien $abcda$ und $efghe$ und die übrigbleibende $z_0 aeifhbdz_0$). Das obige Integral ist nun, auf jede der einfach geschlossenen Linien erstreckt, gleich Null, und also auch in Bezug auf die gegebene Linie, da dieses Integral die Summe der vorhergehenden ist. Ist dann die gegebene Linie aus zwei von $z_0$ nach $z$ führenden Wegen entstanden, so hat das Integral auf beiden denselben Werth (§ 18).

Fig. 48.



Anders aber verhält es sich, wenn wir die Function $w$ in der Fläche $T'$ betrachten, also den Integrationsweg auch die Querschnitte überschreiten lassen. Um dies zu untersuchen, wollen wir zuerst den Fall in's Auge fassen, dass kein Querschnitt durch einen späteren, von ihm ausgehenden, in Abschnitte getheilt wird. Nun gehört jeder Querschnitt mit zur Begrenzung von $T'$, und zwar beide Seiten desselben, sodass diese zusammenhängen und man eine geschlossene, ganz im Innern von $T'$ verlaufende Linie $b$ ziehen kann, welche von der einen Seite des Querschnittes auf die andere Seite desselben führt. Sind dann $z_1$ und $z_2$ (Fig. 49) zwei zu beiden Seiten eines Querschnittes einander unendlich nahe liegende Punkte, so fragt es sich, ob

Fig. 49.




$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

wenn man die Integrationswege immer noch ganz in $T'$ verlaufen lässt, in $z_1$ und $z_2$ gleiche (eigentlich um eine unendlich kleine Grösse verschiedene) oder verschiedene Werthe annimmt. Bezeichnet man aber die Werthe von $w$ in $z_1$ und $z_2$, resp. durch $w_1$ und $w_2$, so ist

$$w_2 = \int_{z_0}^{z_2} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz,$$

das erste Integral auf einem beliebigen in $T'$ verlaufenden Wege, das zweite auf einer geschlossenen Curve $b$ genommen, die innerhalb $T'$ von $z_1$ nach $z_2$ führt. Es ist also

$$w_2 - w_1 = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz.$$

Daher haben $w_1$ und $w_2$ gleiche oder verschiedene Werthe, je nachdem das auf die geschlossene Linie $b$ ausgedehnte Integral

$$\int f(z)\, dz$$

Null ist, oder einen von Null verschiedenen Werth $A$ hat. Im ersteren Falle bleibt $w$ beim Ueberschreiten des Querschnittes

stetig, im letzteren Falle dagegen springt $w$ plötzlich von $w_1$ zu $w_2 = w_1 + A$ über und ist daher unstetig. Allein dieser Sprung ist an allen Stellen des nämlichen Querschnittes der gleiche, da der Integralwerth sich nicht ändert, wenn man die geschlossene Linie $b$ so erweitert oder verengert, dass sie an zwei anderen einander unendlich nahe liegenden Punkten $z_1$ und $z_2$ zu beiden Seiten des nämlichen Querschnittes anfängt und endigt (§ 19). Diese Grösse $A$, welche also längs des ganzen Querschnittes constant ist, und um welche die Functionswerthe auf der einen Seite des Querschnittes grösser sind, als auf der anderen, nennt man den Periodicitätsmodul, welcher diesem Querschnitt angehört. Ganz dasselbe findet nun bei jedem Querschnitte statt, da die beiden Seiten eines jeden zusammenhängen, und also eine geschlossene Linie von einem Punkte der einen Seite zu einem unendlich nahen auf der anderen Seite durch das Innere von $T'$ gezogen werden kann. Jedem Querschnitt gehört also ein Periodicitätsmodul an, der für einen und denselben Querschnitt constant bleibt (immer noch unter der Voraussetzung, dass kein Querschnitt durch einen späteren in Abschnitte getheilt wird). Denkt man sich nun aber die Function $w$ auch in $T$, also auch über einen Querschnitt hinüber, stetig fortgesetzt, so erlangt sie auf dem den Querschnitt überschreitenden Wege $z_0 z_1 b z_2 z_1$ in $z_1$ einen Werth, der um den Periodicitätsmodul $A$ grösser ist, als der Werth, den sie auf dem Wege $z_0 z_1$ erreicht, welcher den Querschnitt nicht überschreitet. Denn im ersteren Falle ist der Werth von $w$ in $z_1$ als die stetige Fortsetzung von $w_2$ zu betrachten, während auf dem zweiten Wege $w$ den Werth $w_1$ erlangt, und

$$w_2 = w_1 + A$$

war. Es findet hier ein ähnlicher Vorgang statt, wie der, den wir früher bei den Verzweigungsschnitten kennen gelernt haben (vgl. § 13), und so lange die Fläche $T$ nur aus einem einzigen Blatte besteht, kann man auch wirklich jeden Querschnitt wie einen Verzweigungsschnitt ansehen, über den hinüber die Fläche sich in ein anderes Blatt fortsetzt, nur müsste man sich dann unendlich viele Blätter unter einander liegend denken, da bei jedem neuen Ueberschreiten des Querschnittes der Functionswerth $w$ auf's Neue um $A$ zunimmt, und der ursprüngliche Werth niemals wieder eintritt. Wenn die Fläche $T$ selbst schon aus mehreren Blättern besteht, würde jene Vorstellungsart zu complicirt werden und daher keinen rechten Nutzen gewähren.

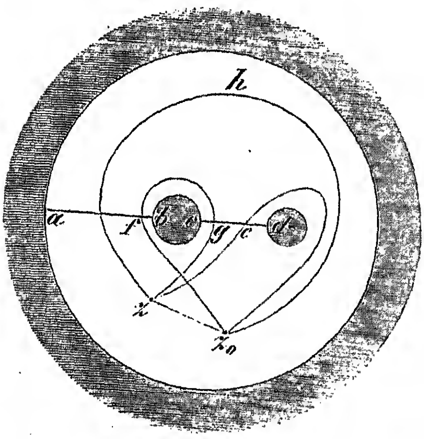
Das Zeichen von $A$ ändert sich, wenn die geschlossene Curve $b$ in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird; wir wollen aber den Periodicitätsmodul stets so annehmen, dass er gleich ist dem

Integrale längs der geschlossenen Curve $b$, wenn diese in der Richtung der wachsenden Winkel durchlaufen wird.

Denkt man sich jetzt alle möglichen Wege, welche von einem festen Anfangspunkte $z_0$ nach einem beliebigen Punkte $z$ innerhalb der Fläche $T$ führen, so können diese Wege entweder keinen Querschnitt überschreiten, oder aber einen oder mehrere Querschnitte ein oder mehrere Male durchschneiden. Je nach der Beschaffenheit dieser Wege kann daher $w$ in einem und demselben Punkte $z$ sehr verschiedene Werthe erhalten, und ist also eine vieldeutige Function der oberen Grenze des Integrals. Allein da diese Verschiedenheit der Werthe von $w$ in $z$ nur durch die Ueberschreitungen der Querschnitte bewirkt wird, so können sich diese verschiedenen Werthe nur um Vielfache der Periodicitätsmoduln von einander unterscheiden. Bezeichnen daher $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc. die Periodicitätsmoduln der einzelnen Querschnitte, $n_1$, $n_2$, $n_3$, etc. positive oder negative ganze Zahlen, und $w$ und $w'$ zwei verschiedene Werthe von $w$ in $z$, so muss

$$w' = w + n_1 A_1 + n_2 A_2 + n_3 A_3 + \ldots\ldots$$

Fig. 50.




sein. Ein Beispiel möge dies erläutern. Fig. 50 stelle eine 3fach zusammenhängende Fläche vor, die Querschnitte seien $ab$ und $cd$, die Periodicitätsmoduln für dieselben resp. $A_1$ und $A_2$, so genommen, dass der Uebergang von der einen Seite des Querschnittes auf die andere längs einer geschlossenen Curve in der Richtung der wachsenden Winkel geschehe. Bezeichnet man dann den Werth, den die Function $w$ auf einem Wege erlangt, dadurch, dass man den Weg dem Buchstaben $w$ in Klammern hinzufügt, so ist

$$w\,(z_0\, e\, z) = w\,(z_0\, z) + A_2$$
$$w\,(z_0 f g\, z) = w\,(z_0\, z) - A_1 + A_2$$
$$w\,(z_0\, h\, z) = w\,(z_0\, z) + A_1.$$

Es erhellt hieraus, dass die Integralfunction

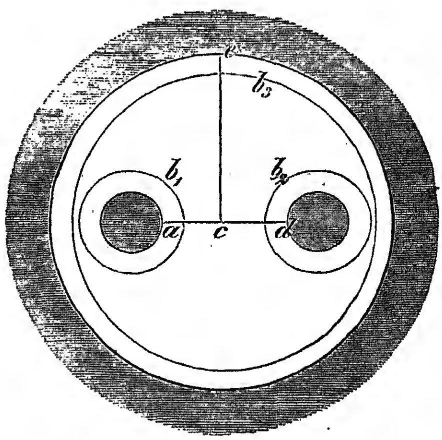
$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$$

eine Vieldeutigkeit ganz besonderer Art besitzt, nämlich dass die verschiedenen Werthe, welche sie für denselben Werth von $z$ annehmen kann, sich nur um Vielfache constanter Grössen von einander unterscheiden. Nimmt man nun die inverse Function, d. h. betrachtet man $z$ als Function von $w$, so ist diese eine periodische Function, da sie ungeändert bleibt, wenn man das Argument $w$ um beliebige Vielfache der Periodicitätsmoduln vermehrt oder vermindert. Hierdurch rechtfertigt sich auch der Name Periodicitätsmodul, da man der Sprache der Zahlentheorie analog sagen kann, dass $z$ für solche Werthe von $w$ gleiche Werthe erhält, welche nach einem Periodicitätsmodul einander congruent sind, d. h. deren Differenz gleich einem Vielfachen des Periodicitätsmoduls ist.

## § 55.

Wir haben bisher angenommen, die Querschnitte seien so gezogen, dass keiner von ihnen durch einen späteren, von ihm ausgehenden, in Abschnitte getheilt wird. Wenn nun dies aber der Fall ist, z. B. so wie in Fig. 51, wo der eine Querschnitt $ad$ durch den zweiten $ce$ in die beiden Abschnitte $ac$ und $cd$ getheilt wird, so kann es vorkommen, dass der Periodicitätsmodul $B_1$ des einen Theils $ac$ von dem $B_2$ des andern Theils $cd$ verschieden ist. Denn $B_1$ ist gleich dem Integral $\int f(z)\, dz$ auf die Linie $b_1$ bezogen, $B_2$ gleich demselben Integrale auf $b_2$ ausgedehnt. Haben nun diese Integrale verschiedene Werthe, so sind auch die Periodicitätsmoduln $B_1$ und $B_2$ verschiedene. Dann bleibt also der Periodicitätsmodul nicht längs eines ganzen Querschnittes constant, sondern nur von einem Knoten des Schnittnetzes bis zum nächsten. Dem Quer-

Fig. 51.



schnitte $ce$ gehört nun auch ein Periodicitätsmodul $B_3$ an, wir haben daher drei Periodicitätsmoduln, trotzdem unsere Fläche nur zwei Querschnitte zur Verwandlung in eine einfach zusammenhängende nöthig hat. Allein in einem solchen Falle bestehen immer Beziehungen zwischen den einzelnen Periodicitätsmoduln. In unserem Beispiele ist das Integral ausgedehnt auf $b_3$ gleich der Summe der Integrale ausgedehnt auf $b_1$ und $b_2$ (§ 19), und daher

$$B_3 = B_1 + B_2;$$

wir haben also in der That nur zwei von einander unabhängige Periodicitätsmoduln, d. h. eben so viele als Querschnitte vorhanden sind.

Um nun im Allgemeinen zu zeigen, dass es immer nur so viele von einander unabhängige Periodicitätsmoduln giebt, als Querschnitte, erinnern wir daran, dass die Querschnitte meist auf mehrfache Weise gezogen werden können. Immer aber giebt es eine Art der Zerschneidung, bei welcher kein Querschnitt durch einen späteren in Abschnitte getheilt wird. Denn dies wird stets erreicht, sobald jeder Querschnitt in einem Punkte der ursprünglichen Begrenzung beginnt und auch in einem solchen endet. Ist die Fläche geschlossen und daher nur durch einen einzigen Punkt begrenzt (§ 46), so braucht man nur jeden Querschnitt in diesem Begrenzungspunkte beginnen und endigen zu lassen.

Sei nun eine $(n+1)$fach zusammenhängende Fläche zuerst so durch $n$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende zerschnitten worden, dass dabei kein Querschnitt durch einen anderen in Theile zerlegt werde; dann haben wir bei dieser Zerschneidungsart gerade so viel Periodicitätsmoduln als Querschnitte. Diese seien

$$A_1, A_2, \dots A_n.$$

Zweitens sei dieselbe Fläche auf eine andere beliebige Art zerschnitten worden. Zerfallen dabei einzelne Querschnitte in Theile mit verschiedenen Periodicitätsmoduln, so ist die Anzahl der letzteren grösser als $n$; seien dieselben

$$B_1, B_2, \dots B_m;\ m > n.$$

Lässt man nun die Variable $z$ von einem beliebigen Punkte $z_0$ aus eine geschlossene Linie beschreiben, welche nur einen Querschnitt des ersten Systemes überschreitet, für welchen $A_k$ der Periodicitätsmodul sei, und bezeichnen $w_0$ und $w$ die Werthe, welche die Function beim Beginn und nach Vollendung der geschlossenen Linie hat, so ist

$$w = w_0 + A_k.$$

Denkt man nun aber die Fläche auf die zweite Art zerschnitten, so kann dieselbe geschlossene Linie mehrere Querschnitte des zwei-

ten Systemes überschreiten; der Werth von $w$ wird daher nach § 54 auch in der Form

$$w = w_0 + h_1 B_1 + h_2 B_2 + \cdots\cdots + h_m B_m$$

enthalten sein müssen, wo die $h$ positive oder negative ganze Zahlen (Null eingeschlossen) bedeuten. Demnach ist

$$A_k = h_1 B_1 + h_2 B_2 + \cdots\cdots + h_m B_m.$$

Lässt man umgekehrt die Variable $z$ von $z_0$ aus eine geschlossene Linie durchlaufen, welche nur einen Querschnitt des zweiten Systemes überschreitet, für welchen der Periodicitätsmodul $B_\lambda$ sei, so ist der Endwerth der Function einmal

$$w_0 + B_\lambda,$$

wird aber, wenn man auf die Ueberschreitungen der Querschnitte des ersten Systemes Rücksicht nimmt, auch in der Form

$$w_0 + g_1 A_1 + g_2 A_2 + \cdots\cdot + g_n A_n$$

enthalten sein, worin die $g$ ebenfalls positive oder negative ganze Zahlen (oder Null) bedeuten. Hieraus folgt

$$B_\lambda = g_1 A_1 + g_2 A_2 + \cdots\cdot + g_n A_n.$$

Wir erhalten demnach zwischen den beiden Systemen der Periodicitätsmoduln $A$ und $B$ folgende zwei Systeme von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = h_1' B_1 + h_2' B_2 + \cdots\cdot + h_m' B_m \\ A_2 = h_1'' B_1 + h_2'' B_2 + \cdots\cdot + h_m'' B_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = h_1^{(n)} B_1 + h_2^{(n)} B_2 + \cdots\cdot + h_m^{(n)} B_m \end{array}\right\} \text{I.}$$

und

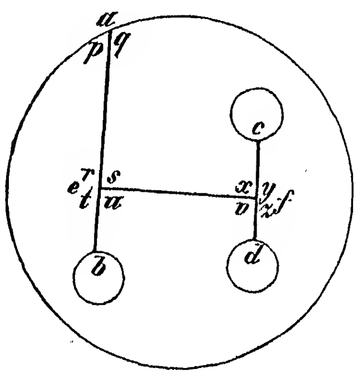
$$\left.\begin{array}{l} B_1 = g_1' A_1 + g_2' A_2 + \cdots + g_n' A_n \\ B_2 = g_1'' A_1 + g_2'' A_2 + \cdots + g_n'' A_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_m = g_1^{(m)} A_1 + g_2^{(m)} A_2 + \cdots + g_n^{(m)} A_n. \end{array}\right\} \text{II.}$$

Da nun der Annahme nach $m > n$ ist, so kann man aus II. die $n$ Grössen $A$ eliminiren und erhält dadurch $m - n$ Beziehungen zwischen den Grössen $B$. Da man aber diese Beziehungen auch dadurch erhalten kann, dass man die Werthe der $A$ aus I. in II. substituirt, so müssen sie homogene lineare Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten sein. Demnach ergiebt sich; wenn frühere Querschnitte durch spätere in Theile zerlegt werden, für welche die Periodicitätsmoduln verschiedene Werthe haben, sodass im Ganzen $m$ Periodicitätsmoduln existiren, während nur $n$ Querschnitte vorhanden sind, so bestehen zwischen diesen $m$ Periodicitätsmoduln $m - n$ lineare homogene Bedingungsgleichungen mit ganzzahligen

Coefficienten, und nur $n$ von ihnen, d. h. ebenso viele als Querschnitte existiren, sind von einander unabhängig.

Man kann dasselbe auch ohne Rechnung durch eine einfache Betrachtung einsehen. Nachdem nämlich die Fläche durch die Querschnitte einfach zusammenhängend geworden ist, kann ihre Begrenzung in einem ununterbrochenen Zuge durchlaufen werden (§ 51. VII). Macht man diesen Umlauf, so treten dabei die Querschnitte und deren Abschnitte in einer bestimmten Reihenfolge auf. Wenn nun bei jedem Querschnitte der Periodicitätsmodul für denjenigen Abschnitt bekannt ist, an den man bei dem Umlaufe zuerst gelangt, so sind dann die Periodicitätsmoduln für die übrigen Abschnitte durch lineare Beziehungen gegeben. Wir zeigen dies nur an einem Beispiele. In der durch Fig. 52 dargestellten 4fach zusammenhängenden Fläche seien $ab$, $cd$, $ef$ drei Querschnitte, welche die Fläche in eine einfach zusammenhängende verwandeln. Die Buchstaben $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, $u$, $v$, $x$, $y$, $z$ sollen die Werthe bedeuten, welche die Function $w$ in den entsprechenden, unendlich nahe an den Querschnitten liegenden Punkten besitzt. Durchläuft man die Querschnitte von $a$ aus in dem Sinne $aefc$ ...., so seien nun die Periodicitätsmoduln bekannt für die drei Stücke $ae$, $ef$, $fc$, und zwar sei

Fig. 52.




$$q - p = s - r = A_1\ ,\ s - u = x - v = A_2\ ,\ x - y = A_3\ ;$$

gesucht sind die Periodicitätsmoduln für die Stücke $eb$ und $fd$, also

$$u - t = X_1 \qquad z - v = X_2.$$

Um diese zu finden, bemerke man, dass da, wo zwei benachbarte Functionswerthe nicht durch einen Querschnitt von einander getrennt sind, zwischen ihnen Stetigkeit stattfindet, ihr Unterschied also unendlich klein ist. Demnach kann man setzen

$$t - r = 0 \qquad z - y = 0.$$

Damit wird nun

$$X_1 = u - t = u - r = (s - r) - (s - u) = A_1 - A_2$$
$$X_2 = z - v = y - v = (x - v) - (x - y) = A_2 - A_3,$$

wodurch $X_1$ und $X_2$ durch $A_1$, $A_2$, $A_3$ ausgedrückt sind.

## § 56.

Wir haben bisher angenommen, dass aus der $z$-Fläche sämmtliche Unstetigkeitspunkte durch kleine Umhüllungen ausgeschieden seien, sodass die Function $f(z)$ in der entstehenden Fläche $T'$ endlich blieb. Nun wollen wir aber zeigen, dass es in der That nicht nothwendig ist, alle auszuschliessen, und untersuchen, bei welchen dies nicht zu geschehen braucht.

Der Periodicitätsmodul $A$ für irgend einen Querschnitt ist, wie § 54 gezeigt wurde, der Werth des Integrales $\int f(z)\, dz$ ausgedehnt über eine geschlossene Linie $b$, welche von der einen Seite des Querschnittes durch das Innere der einfach zusammenhängenden Fläche $T'$ auf die andere Seite desselben Querschnittes führt. Nun kann aber dieses Integral in vielen Fällen den Werth Null haben. Denken wir uns, dass die Linie $b$ eine aus der $z$-Fläche ausgeschiedene Stelle umgiebt, die einen Unstetigkeitspunkt $a$ (der nicht zugleich Verzweigungspunkt ist) der Function $f(z)$ enthielt. Alsdann hat das Integral $\int f(z)\, dz$ nach § 42 nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in dem Ausdrucke, welcher angiebt, wie $f(z)$ unendlich wird, das Glied

$$\frac{c'}{z-a}$$

vorhanden ist; in allen übrigen Fällen wird das Integral gleich Null. Letzteres findet also z. B. statt, wenn $f(z)$ in $a$ unendlich wird wie

$$\frac{c''}{(z-a)^2}$$

oder wie

$$\frac{c^{(n)}}{(z-a)^n} + \frac{c^{(n+1)}}{(z-a)^{n+1}} + \cdots\cdots,$$

wo $n$ eine von 1 verschiedene positive ganze Zahl bedeutet. In einem solchen Falle bleibt nun die Function $w$ beim Ueberschreiten des Querschnittes stetig, daher ist es nicht nothwendig, die Unstetigkeitsstelle auszuschliessen, und der Querschnitt braucht gar nicht gezogen zu werden. Denkt man sich z. B. ein einfach zusammenhängendes Stück der $z$-Fläche, in welchem nur Unstetigkeitspunkte der in Rede stehenden Art enthalten sind, so erhält das Integral $\int f(z)\, dz$ auch auf zwei Wegen, die einen solchen Unstetigkeitspunkt einschliessen, denselben Werth, weil es, um den Unstetigkeitspunkt herum genommen, den Werth Null hat (§ 18). Innerhalb eines solchen Flächenstücks ist daher die Function

$$w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$$

ebenfalls eine eindeutige Function der oberen Grenze, wie wenn das Flächenstück gar keine Unstetigkeitspunkte enthielte.

Dies ist die eine Art der Unstetigkeitspunkte, die nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Gehen wir zu Verzweigungspunkten über, so erhält das Integral $\int f(z)\, dz$ längs der geschlossenen Linie $b$ den Werth Null, wenn diese einen Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung umgiebt, in welchem $f(z)$ von keiner höheren Ordnung unendlich wird, als von der Ordnung $\frac{m-1}{m}$ (§ 21), und überhaupt, wenn in dem Ausdruck, welcher angiebt, wie $f(z)$ in dem Verzweigungspunkte unendlich wird, das Glied, das von der ersten Ordnung unendlich ist, fehlt (§ 42). In diesem Falle braucht also der Unstetigkeits- und Verzweigungspunkt ebenfalls nicht ausgeschlossen zu werden, und auch hier fällt dann allemal ein Querschnitt fort. Aber da jetzt die $z$-Fläche aus mehreren Blättern besteht, so kann sie auch ohne irgend welche Ausschliessungen mehrfach zusammenhängend sein. Soll dann der Periodicitätsmodul eines Querschnittes einen von Null verschiedenen Werth haben, so muss die geschlossene Linie $b$ mindestens zwei Verzweigungspunkte umgeben, da sie immer eine Linie sein muss, die für sich allein noch nicht einen Flächentheil vollständig begrenzt.

Endlich können wir auch entscheiden, wann der unendlich entfernte Punkt ausgeschlossen werden muss. Der Werth des Integrals $\int f(z)\, dz$ für eine den Punkt $z = \infty$ umgebende Linie richtet sich (§ 43) nach der Beschaffenheit, welche die Function

$$z^2 f(z)$$

für $z = \infty$ hat. Dieser Punkt muss also ausgeschlossen werden, wenn

$$\lim_{z=\infty} [z\, f(z)] \quad \text{endlich und von Null verschieden}$$

ist, und überhaupt dann und nur dann, wenn in der Entwickelung von $f(z)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von $z$ ein Glied von der Form

$$\frac{g}{z}$$

vorhanden ist.

Wenn nun für eine gegebene Function $f(z)$ aus der $z$-Fläche alle diejenigen Punkte ausgeschlossen worden sind, die nothwendig

ausgeschlossen werden müssen, und nur diese, so ist innerhalb der so entstandenen Fläche $T$ das Integral $\int f(z)\, dz$, bezogen auf eine geschlossene Linie, welche für sich allein einen Flächentheil vollständig begrenzt, stets gleich Null. Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die geschlossene Linie nicht durch einen Unstetigkeitspunkt oder Verzweigungspunkt hindurch führt.

## § 57.

Es sollen nun zur Erläuterung der vorstehenden Betrachtungen einige Beispiele vorgeführt werden.

### 1. Der Logarithmus.

Wir erinnern zuerst an die schon § 22 und 23 behandelte Function log $z$, oder an die Integralfunction

$$w = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Hier ist $f(z) = \frac{1}{z}$ einwerthig, die $z$-Fläche besteht daher aus einem Blatte. Ferner ist $z = 0$ ein Unstetigkeitspunkt, und in ihm ist

$$\lim z f(z) = \lim z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Dieser Punkt muss daher ausgeschlossen werden. Nimmt man die $z$-Fläche im Unendlichen geschlossen an, so muss auch der Punkt $z = \infty$ ausgeschlossen werden, weil auch

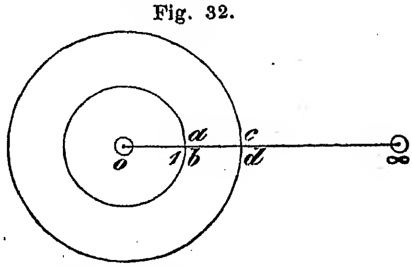
$$[\lim z f(z)]_{z=\infty} = 1$$

ist. Durch Ausschliessung dieser beiden Punkte wird die Fläche $T$ zweifach zusammenhängend, und ein Querschnitt, welcher die beiden die Punkte 0 und $\infty$ umgebenden Kreise verbindet, verwandelt sie in eine einfach zusammenhängende Fläche (Fig. 32). Der Periodicitätsmodul $A$ ist gleich dem Integral

$$\int \frac{dz}{z},$$

ausgedehnt auf eine den Nullpunkt in der Richtung der wachsenden Winkel umgebende geschlossene Linie, er ist also

Fig. 32.



$$A = 2\pi i.$$

Eine solche Linie umgiebt zugleich auch den Punkt $\infty$, und für diese erhält man (§ 43)

$$\int \frac{dz}{z} = -2\pi i \left[\lim \frac{z^2 \frac{1}{z}}{z}\right]_{z=\infty} = -2\pi i,$$

wenn die Integration in der positiven Begrenzungsrichtung ausgeführt, also der Querschnitt in der entgegengesetzten Richtung überschritten wird, wie vorhin.

## 2. Der Arcus Tangens.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Hier ist

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

ebenfalls einwerthig und wird von der ersten Ordnung unendlich für $z = i$ und $z = -i$, dagegen ist für $z = \infty$

$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{1+z^2} = \lim \frac{1}{z + \frac{1}{z}} = 0.$$

Man braucht daher nur die Punkte $z = i$ und $z = -i$ durch kleine Kreise auszuschliessen und erhält dann, wenn die $z$-Fläche im Unendlichen geschlossen angenommen wird, eine zweifach zusammenhängende Fläche, welche sich durch einen die kleinen Kreise um $+i$ und $-i$ verbindenden Querschnitt in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Der Periodicitätsmodul $A$ ist das Integral

Fig. 53.


$$\int dw$$

ausgedehnt auf eine den Punkt $+i$ in der Richtung der wachsenden Winkel umgebende geschlossene Linie, und daher, wie schon § 20 ermittelt wurde,

$$A = \pi.$$

Dieselbe Linie kann auch angesehen werden als eine, welche den Punkt $-i$ in der Richtung der abnehmenden Winkel umgiebt und liefert dann denselben Periodicitätsmodul.

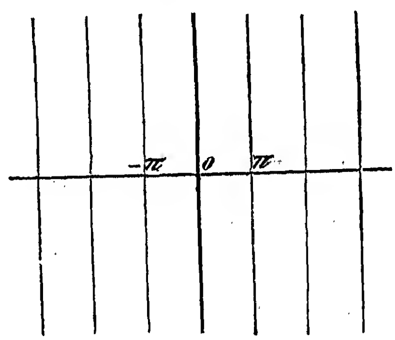
Nimmt man die $z$-Fläche nicht im Unendlichen geschlossen an, sondern begrenzt sie durch eine geschlossene Linie, die man dann ins Unendliche sich ausdehnen lässt, so wird die Fläche $T$ durch Ausschliessung der beiden Punkte $+i$ und $-i$ zu einer dreifach zusammenhängenden. Man muss also dann zwei Querschnitte anwenden, um sie in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Da nun aber das Integral

$$\int \frac{dz}{1+z^2}$$

ausgedehnt auf eine geschlossene Linie entweder den Werth $+\pi$ oder $-\pi$ oder Null hat, je nachdem die Linie den Punkt $+i$ oder $-i$ oder beide in der Richtung der wachsenden Winkel umgiebt (§ 20), so haben die auf die beiden Querschnitte bezogenen Periodicitätsmoduln, je nach der Art, wie sie gezogen werden, entweder die Werthe $+\pi$ und $-\pi$, oder der eine hat den Werth $+\pi$ und der andere den Werth Null. Die Function $w = arc\,tg\,z$ ändert sich daher hier auch nur um Vielfache von $\pi$.

Die inverse Function $z = tg\,w$ ist nun um die Grösse $\pi$ periodisch. Die Abbildung der im Unendlichen geschlossen angenommenen $z$-Fläche auf der Fläche der $w$ geschieht hier in ganz ähnlicher Weise, wie es § 23 bei der Exponentialfunction gezeigt worden ist; an die Stelle der die Punkte 0 und $\infty$ einschliessenden Kreise treten hier nur diejenigen, welche die Punkte $+i$ und $-i$ umgeben. Nimmt man den Querschnitt, welcher diese Kreise verbindet, längs der Ordinatenaxe verlaufend an, so wird die $w$-Fläche in Streifen getheilt, welche von Geraden begrenzt werden, die mit der Ordinatenaxe parallel laufen und durch die Punkte $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ etc. hindurchgehen. In jedem dieser Streifen nimmt die Function $z = tg\,w$ ihre sämmtlichen Werthe an, und zwar jeden nur einmal, weil abgesehen von Vielfachen des Periodicitätsmoduls jedem Werthe von $z$ nur ein Werth von $w$ entspricht, da die $z$-Fläche nur aus einem Blatte besteht.

Fig. 54.



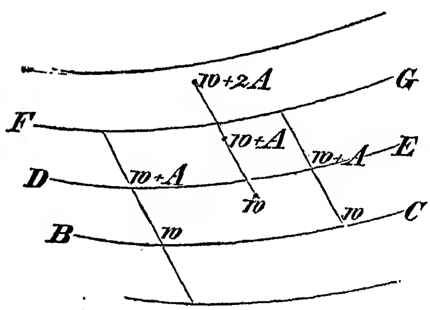

Wir wollen nun diese Function auch in umgekehrter Weise betrachten, indem wir von der periodischen Function ausgehen.

Bedeutet $z = \varphi(w)$ eine einwerthige einfach periodische Function mit dem Periodicitätsmodul $A$, d. h. eine einwerthige Function, welche die Eigenschaft besitzt, dass

$$\varphi(w + A) = \varphi(w)$$

ist, so lässt sich die Ebene der $w$ so in Streifen theilen, dass die Function in jedem Streifen ihre sämmtlichen Werthe annimmt, und in je zwei in verschiedenen Streifen liegenden Punkten, deren Differenz gleich $A$ oder gleich einem Vielfachen von $A$ ist, gleiche Werthe hat (Fig. 55). Zieht man nämlich eine beliebige, sich selbst nicht schneidende Linie $BC$, so bilden die Punkte $w + A$, welche durch Addition von $A$ aus den Punkten der Linie $BC$ entstehen, eine dieser parallele Linie $DE$. Die Function $\varphi$ hat also auf $DE$ dieselben Werthe, wie auf $BC$. Dasselbe findet auf allen Linien statt, die mit den vorigen in gleichen Entfernungen parallel laufen. Ist ferner $w$ ein Punkt im Inneren des Streifens $BCDE$, so liegt $w + A$ im Inneren des anstossenden Streifens $DEFG$, $w + 2A$ im Inneren des nächstfolgenden Streifens u. s. f. In diesen Punkten hat daher die Function wiederum gleiche Werthe. Da nun also je zwei Punkte $w$ und $w + nA$, in denen die Function gleiche Werthe hat, in verschiedenen Streifen liegen, so muss sie in jedem Streifen ihre sämmtlichen Werthe erhalten.

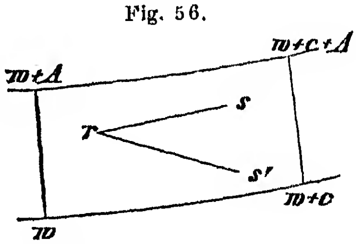
Fig. 55.




Wir wollen nun weiter annehmen, die Function $z = \varphi(w)$ werde in einem und demselben Streifen nur in einem endlichen Punkte $w = r$ unendlich gross von der ersten Ordnung; dann kann man zeigen, dass sie in jedem Streifen auch nur einmal Null wird und daher auch jeden Werth nur einmal annimmt. Zu dem Ende mögen mit $s$, $s'$, $s''$ ... die Punkte bezeichnet werden, in denen $\varphi(w)$ innerhalb des betrachteten Streifens Null wird; die Anzahl dieser Punkte sei $n$ und wir wollen annehmen, dass keiner von ihnen im Unendlichen liegt. Zieht man nun aus zwei Punkten $w$ und $w + c$ auf einer der beiden den Streifen begrenzenden Linien Gerade nach den Punkten $w + A$ und $w + c + A$ der anderen Grenzlinie (Fig. 56), so erhält man ein Parallelogramm mit den Eckpunkten $w$, $w + c$, $w + c + A$, $w + A$, und wenn, wie angenommen wurde, die Punkte $r$, $s$, $s'$, $s''$ ... alle im Endlichen

liegen, so kann man die Punkte $w$ und $w + c$ immer so wählen, dass $r$, $s$, $s'$ ... innerhalb des Parallelogramms liegen. Erstreckt man dann das Integral $\int d \log \varphi(w)$ auf die Begrenzung dieses Parallelogramms, so erhält man, da $\varphi(w)$ innerhalb desselben $n$ Mal Null und einmal unendlich gross wird, nach § 35 (21)

Fig. 56.




$$\int d \log \varphi(w) = 2\pi i (n - 1).$$

Dieses Integral zerlegt sich in vier Theile, längs der vier Seiten des Parallelogramms. Man bemerke aber, dass $\int d \log \varphi(w)$ so lange von dem Integrationswege unabhängig ist, als dieser nicht eine der Linien $rs$, $rs'$ etc. überschreitet, von denen jede die Punkte verbindet, in denen $\varphi(w)$ unendlich oder Null ist (§ 22). Nimmt man es nun längs der Geraden, die von $w + A$ nach $w$ führt, so erhält es hier den Werth Null; denn zunächst wird es gleich $\log \varphi(w) - \log \varphi(w + A)$, allein da keine der Linien $rs$ überschritten wird, so ist nicht bloss $\varphi(w + A) = \varphi(w)$, sondern auch $\log \varphi(w + A) = \log \varphi(w)$. (Würde eine Linie $rs$ überschritten werden, so würde man haben: $\log \varphi(w + A) = \log \varphi(w) \pm 2\pi i$.) Aus demselben Grunde ist auch das Integral Null, das sich auf die von $w + c$ nach $w + c + A$ führende Gerade bezieht. Längs der beiden den Streifen begrenzenden Linien von $w$ bis $w + c$, und von $w + A$ bis $w + c + A$ aber durchläuft $\log \varphi(w)$ die nämlichen Werthe, und da diese Linien im entgegengesetzten Sinne zu durchlaufen sind, so heben die Integrale längs derselben sich auf. Demnach ist das längs der ganzen Begrenzung des Parallelogramms zu nehmende Integral in der vorigen Gleichung gleich Null, woraus

$$n = 1$$

folgt. Die Function $\varphi(w)$ wird daher in dem betrachteten Streifen nur einmal Null. Dann kann sie aber auch irgend einen beliebigen Werth $k$ in demselben Streifen nur einmal annehmen, denn bildet man die Function $\varphi(w) - k$, so ist diese ebenso periodisch wie $\varphi(w)$ und wird ebenso wie diese nur einmal unendlich für $w = r$, also wird sie in demselben Streifen auch nur einmal Null, d. h. $\varphi(w)$ wird nur einmal gleich $k$.

Nun kann man nach § 29 setzen

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{w - r} + \psi(w), \tag{36}$$

wo $c$ eine gegebene Constante, und $\psi(w)$ eine Function bedeutet, die in dem zu betrachtenden Streifen nicht mehr unendlich gross ist, sondern nur noch in den übrigen Streifen. Daraus folgt

$$\frac{dz}{dw} = \varphi'(w) = -\frac{c}{(w-r)^2} + \psi'(w). \tag{37}$$

Da nun $\psi'(w)$ in dem Streifen ebenfalls endlich bleibt, so wird $\frac{dz}{dw}$ auch nur für $w = r$ unendlich gross, also nur da, wo $z$ unendlich wird, und dies muss in gleicher Weise von allen Streifen gelten. Während aber $z$ von der ersten Ordnung unendlich gross ist, ist $\frac{dz}{dw}$ von der zweiten Ordnung unendlich gross. Betrachtet man also $\frac{dz}{dw}$ als eine Function von $z$, so ist sie nur für $z = \infty$ und zwar von der zweiten Ordnung unendlich gross. Da ferner $z$ in einem und demselben Streifen jeden Werth nur einmal annimmt, so entspricht in einem und demselben Streifen jedem Werth von $z$ nur ein Werth von $w$. Demnach ist $w$ eine Function von $z$, welche zwar für jeden Werth von $z$ unendlich viele Werthe hat, die sich aber nur um Vielfache des Periodicitätsmoduls, also um constante Grössen, von einander unterscheiden. Folglich ist $\frac{dw}{dz}$ eine einwerthige Function von $z$, da die Constanten bei der Differentiation verschwinden. Die reciproke Function $\frac{dz}{dw}$ muss daher ebenfalls eine einwerthige Function von $z$ sein. Verbindet man dieses mit dem Vorhergehenden, so ergiebt sich, dass $\frac{dz}{dw}$ eine einwerthige Function von $z$ ist, welche nur für $z = \infty$ und hier von der zweiten Ordnung unendlich gross ist. Folglich ist (nach § 31) $\frac{dz}{dw}$ eine ganze Function zweiten Grades von $z$. Eine solche muss nach § 36 auch zwei Mal den Werth Null annehmen. Bezeichnet man mit $a$ und $b$ die Werthe von $z$, für welche dieses geschieht, und mit $C$ eine Constante, so ist

$$\frac{dz}{dw} = C(z-a)(z-b) \tag{38}$$

und daher

$$w = \int \frac{dz}{C(z-a)(z-b)}.$$

Demnach ist eine einfach periodische Function, welche in jedem Streifen nur für einen endlichen Punkt unendlich gross von der ersten Ordnung wird, die inverse Function des vorstehenden algebraischen Integrals.

In diesem können die Werthe $a$ und $b$ nicht einander gleich sein, denn in diesem Falle würde die Function

$$w = \int \frac{dz}{C(z-a)^2}$$

nach § 56 eine einwerthige Function der oberen Grenze sein, und dann könnte $z$ nicht eine periodische Function sein. Die Constante $C$ lässt sich durch $c$ ausdrücken; denn aus (38) folgt

$$C = \left[\lim \frac{\frac{dz}{dw}}{z^2}\right]_{z=\infty}$$

und mit Benutzung der Gleichungen (36) und (37)

$$C = \left[\lim \frac{-\frac{c}{(w-r)^2} + \psi'(w)}{\left(\frac{c}{w-r} + \psi(w)\right)^2}\right]_{w=r}$$

oder

$$C = \lim \frac{-c + (w-r)^2\,\psi'(w)}{(c + (w-r)\,\psi(w))^2} = -\frac{1}{c}.$$

Hiermit wird

$$w = \int \frac{-c\,dz}{(z-a)(z-b)}.$$

Der Periodicitätsmodul $A$ ist gleich dem Werthe dieses Integrals, wenn es längs einer geschlossenen Linie genommen wird, die entweder den Punkt $a$ oder den Punkt $b$ umgiebt. Integrirt man um $a$ in der Richtung der wachsenden Winkel, so folgt

$$A = 2\pi i \left[\lim \frac{-c(z-a)}{(z-a)(z-b)}\right]_{z=a} = \frac{2\pi i c}{b-a},$$

bei der Integration um $b$ würde man den entgegengesetzten Werth erhalten. Giebt man dem Integral die untere Grenze $h$, d. h. erhält $z$ in dem Punkte $w = 0$ den Werth $h$, so hat man, da für $w = r$ und $w = s$ resp. $z = \infty$ und $z = 0$ ist,

$$r = \int_h^\infty \frac{-c\,dz}{(z-a)(z-b)}, \quad s = \int_0^h \frac{+c\,dz}{(z-a)(z-b)}.$$

### 3. Der Arcus Sinus.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Hier besteht die $z$-Fläche für die Function

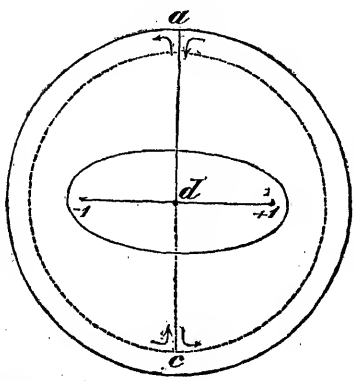
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

aus zwei Blättern. Wir haben die zwei Verzweigungspunkte $z = +1$ und $z = -1$, welche zugleich Unstetigkeitspunkte sind. Da in ihnen aber $f(z)$ nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird, so brauchen diese Punkte nicht ausgeschlossen zu werden, dagegen muss dies mit $z = \infty$ geschehen, weil

$$\left[\lim \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\right] = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$$

also endlich ist, und zwar muss in jedem Blatte der Punkt $\infty$ ausgeschlossen werden, da er kein Verzweigungspunkt ist. Aus diesem Grunde ist es bei diesem Beispiele für den Zusammenhang der Fläche gleichgültig, ob man die beiden Blätter der $z$-Fläche im Unendlichen geschlossen annimmt, oder ob man in jedem eine geschlossene Linie als Begrenzung gezogen denkt, die man sich dann ins Unendliche ausdehnen lässt. In Fig. 57 ist die letztere Darstellungsart der leichteren Ausführbarkeit wegen gewählt. Der Verzweigungsschnitt ist von $-1$ nach $+1$ gelegt, und die im zweiten Blatte verlaufenden Linien sind durch Punkte angedeutet. Diese Fläche $T$ ist zweifach zusammenhängend, und der Querschnitt muss, um die Fläche nicht zu zerstücken, den Verzweigungsschnitt überschreiten. Er ist durch die Linie $adc$, von welcher der Theil $dc$ im zweiten Blatte verläuft, bezeichnet worden. Der Periodicitätsmodul ist das Integral

Fig. 57.



$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

ausgedehnt in der Richtung der wachsenden Winkel auf eine geschlossene Linie, welche die beiden Punkte $-1$ und $+1$, sei es im ersten oder im zweiten Blatte, umgiebt. Nimmt man an, dass in den Punkten, welche im ersten Blatte in unmittelbarer Nähe des von $-1$ nach $+1$ führenden Verzweigungsschnittes auf der linken Seite liegen, der Quadratwurzel das positive Vorzeichen beigelegt werde, und lässt man die geschlossene Linie im ersten Blatte verlaufen, so kann sie bis zu dem Verzweigungsschnitt verengert werden, und dann wird

$$A = \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -2 \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

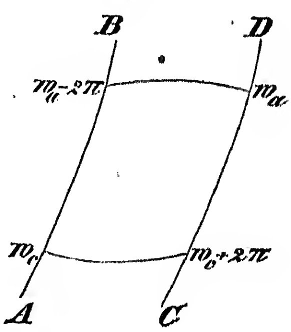
Wir haben § 43 gesehen, dass man den Werth dieses Integrals dadurch bestimmen kann, dass man die geschlossene Linie als eine den Punkt $\infty$ umgebende betrachtet, und erhält danach

$$A = -2\pi.$$

Für eine im zweiten Blatte verlaufende Linie würde sich ebenso $+2\pi$ ergeben haben; und in der That überschreitet eine im zweiten Blatte in der Richtung der wachsenden Winkel um $-1$ und $+1$ herumgehende Linie den Querschnitt in entgegengesetzter Richtung, wie eine ebensolche Linie im ersten Blatte. Daher ist die inverse Function $\sin w$ des vorliegenden Integrals um $2\pi$ periodisch.

Um die Abbildungsart der $z$-Fläche auf der $w$-Fläche zu finden, lassen wir $z$ die ganze Begrenzung der Fläche $T'$ in positiver Richtung durchlaufen, von $a$ beginnend, wo $w$ den Werth $w_a$ habe. Wird die im ersten Blatte befindliche äussere Begrenzung von der Variablen $z$ durchlaufen, so geht $w$ von $w_a$ bis $w_a - 2\pi$ auf einer Curve, deren Gestalt von der Gestalt der Begrenzungscurve in $z$ abhängt (Fig. 58). Jetzt geht $z$ auf der linken Seite der Querschnittsrichtung $ac$ von $a$ nach $c$, und $w$ von $w_a - 2\pi$ bis zu einem Werthe, der mit $w_c$ bezeichnet werden möge. Wiederum kann die Curve, auf der dies geschieht, je nach der Gestalt des Querschnitts $ac$

Fig. 58.



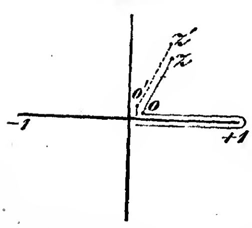
verschieden sein. Ferner durchläuft $z$ von $c$ aus die äussere Begrenzung des zweiten Blattes; dann geht $w$ von $w_c$ nach $w_c + 2\pi$, wo die Uebergangscurve auch erst durch die äussere Begrenzung des zweiten Blattes der $z$-Fläche bestimmt wird; endlich schliesst $z$ seinen Umlauf, indem es auf der linken Seite der Querschnittsrichtung $ca$ zum Ausgangspunkte zurückkehrt; dann geht auch $w$ von $w_c + 2\pi$ nach $w_a$ zurück; die Curve, auf welcher dies geschieht, muss dem Wege $(w_a - 2\pi, w_c)$ parallel sein, weil diese beiden Linien den beiden Seiten des Querschnitts entsprechen, und $w$ in je zwei unendlich nahen Punkten der beiden Seiten um $2\pi$ verschiedene Werthe hat. Dehnt man jetzt die äusseren Begrenzungen der Fläche $T$ ins Unendliche aus, so rücken auch die Curven $(w_a, w_a - 2\pi)$ und $(w_c, w_c + 2\pi)$ ins Unendliche, und $z$ oder $\sin w$ nimmt seine sämmtlichen Werthe innerhalb eines Streifens an, der von den parallelen Curven $AB$ und $CD$ begrenzt wird. In einem solchen nimmt aber $z$ jeden Werth zwei Mal an, denn da die $z$-Fläche aus zwei Blättern besteht, so gehören, abgesehen von dem Periodicitätsmodul, jedem Werthe von $z$ zwei Werthe von $w$ an, und daher erhält $z$ oder $\sin w$ in zwei verschiedenen Punkten $w$ denselben Werth. Nimmt man den Querschnitt $ac$ längs der Ordinatenaxe verlaufend an, sodass zu beiden Seiten desselben $z = iy$ zu setzen ist (wo $y$ reell), so erhält man

$$w = i \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}},$$

sodass auch $w$ rein imaginär oder um Vielfache des reellen Periodicitätsmoduls $2\pi$ von einer rein imaginären Grösse verschieden ist. Alsdann wird die $w$-Ebene in Streifen getheilt durch gerade Linien, welche der $y$-Axe parallel laufen und durch die Punkte $0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ etc. hindurchgehen.

Um nun zu bestimmen, in welcher Beziehung zwei Punkte $w$ und $w'$ stehen, welchen in demselben Streifen gleiche Werthe von $z$ entsprechen, lassen wir die letztere Variable zuerst vom Punkte $0$ im ersten Blatte zu dem unmittelbar darunter liegenden $0'$ im zweiten Blatte übergehen, ohne den Querschnitt zu überschreiten. Dies kann geschehen (Fig. 59), indem man längs des Verzweigungsschnittes um $+1$ herum zunächst auf die andere Seite desselben, und dann über ihn hinüber ins zweite Blatt gelangt. Auf diesem Wege erhält man in $0'$ für $w$ den Werth

Fig. 59.



$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_1^0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi.$$

Demnach entspricht dem im zweiten Blatte liegenden Punkte $z = 0'$ der Punkt $w = \pi$. Geht man nun im ersten $z$-Blatte von 0 nach $z$, so gehe $w$ von 0 nach $w$. Geht aber $z$ im zweiten Blatte von $0'$ nach $z'$, wo $z'$ unmittelbar unter $z$ liegen möge, so geht $w$ mit dem Werthe $\pi$ aus, und weil in diesem Theile die Quadratwurzel $\sqrt{1-z^2}$ das negative Vorzeichen hat, so wird

$$w' = \pi - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

während

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

war; folglich ist

$$w + w' = \pi,$$

oder die Summe der beiden Werthe von $w$, für welche $z$ oder $\sin w$ denselben Werth erhält, ist constant gleich dem halben Periodicitätsmodul, abgesehen von Vielfachen des letzteren.

### 4. Das elliptische Integral.

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

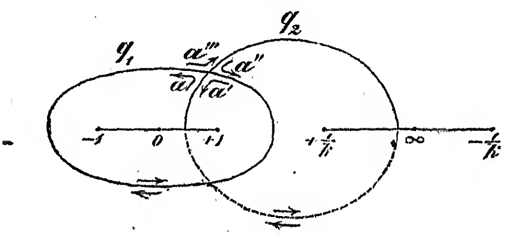
Hier besteht die $z$-Fläche ebenfalls aus zwei Blättern, und hat die vier Unstetigkeits- und Verzweigungspunkte $+1$, $-1$, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$. Keiner von diesen braucht ausgeschlossen zu werden, da die Function unter dem Integralzeichen in jedem nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird. Auch der Punkt $\infty$ braucht nicht ausgeschlossen zu werden, da hier

$$\lim z f(z) = \lim \frac{z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\,(1-k^2z^2)}} = 0$$

ist. Demnach braucht hier gar kein Punkt ausgeschlossen zu werden. Dies hängt damit zusammen, dass, wie wir schon § 45 sahen, das vorliegende Integral für jeden Werth von $z$ endlich

bleibt, und daher nur durch Hinzufügung eines unendlich grossen Vielfachen eines Periodicitätsmoduls unendlich werden kann. Nehmen wir die $z$-Fläche im Unendlichen geschlossen an, so haben wir es also hier mit einer gar nicht (oder nur durch einen beliebigen Punkt) begrenzten Fläche zu thun, die aber mehrfach zusammenhängend ist. Bei einer solchen lassen wir nach § 47 den ersten Querschnitt eine in sich zurücklaufende Linie sein. Denken wir uns einerseits die Punkte $-1$ und $+1$, andererseits die Punkte $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$, durch Verzweigungsschnitte verbunden*), so nehmen wir zum ersten Querschnitt eine Linie $q_1$, welche die beiden Punkte $-1$ und $+1$ im oberen Blatte umgiebt (Fig. 60). Eine solche zerstückt die Fläche nicht, da man von der einen Seite derselben zur anderen gelangen kann. Die Art, wie dies geschieht (vgl. § 46. 5), giebt uns zugleich an, wie der zweite

Fig. 60.




Querschnitt $q_2$ zu legen ist, nämlich indem man von einem Punkte $a$ des ersten Querschnitts eine Linie zieht, welche den Verzweigungsschnitt $(-1, +1)$ überschreitet, dadurch in das zweite Blatt gelangt, dann über den anderen Verzweigungsschnitt hinüber wieder in das erste Blatt zurückkehrt, und so im Ausgangspunkte, aber auf der anderen Seite des Querschnitts (in $a'''$) endigt. Jetzt bilden diese beiden Linien zusammen einen ununterbrochenen Zug, bei welchem jeder der beiden Querschnitte zwei Mal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Die Pfeile deuten an, wie dies in positiver Richtung geschieht. In dieser Fläche $T'$ bildet nun jede geschlossene Linie für sich die vollständige Begrenzung eines Flächentheils, und daher ist die Fläche einfach zusammen-

*) In Fig. 60 ist gleich angenommen worden, dass $k$ reell und kleiner als Eins sei; dann geht der von $+\frac{1}{k}$ nach $-\frac{1}{k}$ führende Verzweigungsschnitt durch $\infty$ hindurch. Wir werden aber anfangs $k$ als eine ganz beliebige Grösse betrachten und erst nachher auf die Annahme zurückkommen, dass $k$ reell und kleiner als Eins sei.

hängend. Die Begrenzung derselben wird von den beiden Seiten der Querschnitte gebildet. Die ursprüngliche Fläche war also dreifach zusammenhängend.

Der Periodicitätsmodul $A_1$ für den Querschnitt $q_1$ ist das Integral $\int dw$, in der Richtung der wachsenden Winkel ausgedehnt auf eine geschlossene Linie, welche von der einen Seite dieses Querschnittes auf die andere Seite desselben führt, also z. B. längs $q_2$. Diese Linie kann verengert werden, bis sie zusammenfällt mit zwei geraden Linien, von denen die eine im ersten Blatte von $\frac{1}{k}$ nach 1, und die andere im zweiten Blatte von 1 nach $\frac{1}{k}$ führt. Nehmen wir an, dass dann im ersten Blatte der Quadratwurzel das Vorzeichen + zugetheilt werde, und setzt man der Kürze wegen

$$\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} = \Delta(z,k),$$

so folgt

$$A_1 = \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{dz}{\Delta(z,k)} - \int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = -2\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\Delta(z,k)}.$$

Der Periodicitätsmodul $A_2$ für den zweiten Querschnitt ist ebenso gleich dem Integral längs der Linie $q_1$, und diese kann wie im vorigen Beispiele bis an den Verzweigungsschnitt verengert werden und giebt dann wie dort

$$A_2 = \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\Delta(z,k)} - \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = -2\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\Delta(z,k)}$$

oder auch, wie man leicht übersieht,

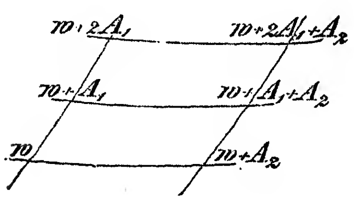
$$A_2 = -4\int_{0}^{1} \frac{dz}{\Delta(z,k)}.$$

Das elliptische Integral hat also zwei von einander verschiedene Periodicitätsmoduln; demnach ist die inverse, die sogenannte elliptische Function, die nach *Jacobi* mit sin am $w$ bezeichnet wird, doppelt periodisch.

Bilden wir jetzt die Fläche der $z$ auf der Fläche der $w$ ab, so ergiebt sich Folgendes: Geht $z$ von $a$ längs des Querschnittes $q_1$ in der Richtung der wachsenden Winkel und zugleich in der

positiven Begrenzungsrichtung, also im Innern der Linie $q_1$ wieder nach $a$ zurück (in Fig. 60 von $a$ nach $a'$), so wächst $w$ von $w$ bis $w + A_2$. Dieser Uebergang geschieht auf einer Curve, deren Gestalt von der beliebig zu wählenden Gestalt der Linie $q_1$ abhängt (Fig. 61); geht nun $z$ weiter längs der Linie $q_2$ in denselben Richtungen wiederum nach $a$ (also von $a'$ nach $a''$), so wächst $w$ von $w + A_2$ bis $w + A_2 + A_1$, ebenfalls auf einer Linie, die sich mit der Gestalt von $q_2$ ändert. Durchläuft dann $z$ von $a''$ aus die Linie $q_1$ immer noch in der positiven Begrenzungsrichtung, aber jetzt in der Richtung der abnehmenden Winkel (also von $a''$ nach $a'''$), so geht $w$ von $w + A_2 + A_1$ bis $w + A_1$, da es um $A_2$ abnimmt. Die Curve, auf welcher dieser Uebergang von $w$ geschieht, muss der Curve $(w, w + A_2)$ parallel sein, weil in je zwei zu beiden Seiten der Linie $q_1$ liegenden unendlich nahen Punkten die beiden Werthe von $w$ um die Grösse $A_1$ verschieden sind, und daher den beiden Seiten dieses Querschnittes in $w$ zwei verschiedene aber parallele Linien entsprechen. Geht endlich $z$ von $a'''$ längs des Querschnittes $q_2$ nach $a$, so geht $w$ von $w + A_1$ nach $w$ auf einer Linie, die aus denselben Gründen wie vorhin der Linie $(w + A_2, w + A_1 + A_2)$ parallel sein muss. Den beiden Seiten des Querschnittes $q_1$ entsprechen also die Parallelen $(w, w + A_2)$ und $(w + A_1, w + A_1 + A_2)$, und den beiden Seiten des Querschnittes $q_2$ die Parallelen $(w, w + A_1)$ und $(w + A_2, w + A_2 + A_1)$.

Fig. 61.




Nun entsprechen sämmtlichen Punkten $z$ auf der ganzen unendlichen $z$-Fläche nur solche Punkte $w$, welche innerhalb*) des krummlinig begrenzten Parallelogramms liegen, denn durch jeden beliebigen Punkt der $z$-Fläche kann man eine Linie legen, welche von der einen Seite von $q_1$ nach der anderen Seite von $q_1$ führt, ohne einen Querschnitt zu überschreiten; daher führt die entsprechende Linie $w$ von der Linie $(w, w + A_2)$ durch das Innere des Parallelogramms nach der Linie $(w + A_1, w + A_2 + A_1)$. Demnach nimmt $z$ oder sin am $w$ seine sämmtlichen Werthe in diesem Parallelogramm an, und zwar jeden Werth zwei Mal, weil die $z$-Fläche aus zwei Blättern besteht.

An dieses Parallelogramm schliessen sich nun an allen Seiten andere Parallelogramme an. Denn lässt man z. B. $z$ von $a$ bis nach $a'''$ gehen, so ist $w$ nach $w + A_1$ gegangen. Lässt man

*) Innerhalb, weil $w$ für alle Werthe von $z$ endlich bleibt.

nun aber $w$ über den Querschnitt $q_1$ hinüber sich stetig fortsetzen, so geht jetzt $w$ mit dem Werthe $w + A_1$ aus $a$ aus; an die Seite $(w + A_1, w + A_1 + A_2)$ schliesst sich daher ein neues Parallelogramm an, in dessen Ecken $w$ die Werthe

$$w + A_1,\ w + A_1 + A_2,\ w + 2A_1 + A_2,\ w + 2A_1$$

hat. Ebenso ist es an den übrigen drei Seiten. Auf diese Weise wird die ganze Ebene der $w$ durch zwei Schaaren paralleler Linien in Parallelogramme getheilt. Nimmt man an, dass $k$ reell und kleiner als 1 ist, so liegen die vier Punkte $+1$, $-1$, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ auf der Hauptaxe; verengert man nun die beiden Querschnitte so, dass sie zu beiden Seiten der Hauptaxe verlaufen, so werden die Parallellinien Gerade, welche resp. der $x$- und $y$-Axe parallel laufen. Denn in diesem Falle ist

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

reell; man pflegt den Werth dieses Integrals nach *Jacobi* mit $K$ zu bezeichnen; das andere Integral

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

dagegen ist rein imaginär. Setzt man $\sqrt{1-k^2} = k'$ und transformirt das Integral durch die Substitution

$$z = \frac{\sqrt{1-k'^2z'^2}}{k},$$

so erhält man

$$-i\int_0^1 \frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k'^2z'^2)}},$$

was analog mit $-iK'$ bezeichnet wird. Demnach sind die Periodicitätsmoduln, abgesehen vom Zeichen,

$$4K \quad \text{und} \quad 2iK'.$$

Man kann auch hier wieder bestimmen, in welcher Beziehung je zwei Werthe von $w$ stehen, welche demselben Werthe von $z$, d. h. zwei unmittelbar unter einander liegenden Punkten der $z$-Fläche entsprechen. Dem Werthe $z = 0$ im ersten Blatte entspricht $w = 0$. Um nun zu $0'$ im zweiten Blatt zu kommen, kann

man sich den Querschnitt $q_2$ so erweitert denken, dass er ausser den Punkten 1 und $\frac{1}{k}$ auch noch den Nullpunkt umgiebt. Dann kann man innerhalb $T'$ von 0 aus längs des Verzweigungsschnittes um $+1$ herum auf die andere Seite, und dann über den Verzweigungsschnitt hinüber nach $0'$ kommen (vgl. S. 208), und dann erhält $w$ in $0'$ den Werth

$$\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z,k)} - \int_1^0 \frac{dz}{\Delta(z,k)} = 2K,$$

ist also gleich der Hälfte des einen Periodicitätsmoduls. Geht man nun weiter von $0'$ nach $z'$, wo $z'$ unmittelbar unter $z$ im zweiten Blatt liege, so ist, wenn der Werth von $w$ in $z'$ mit $w'$ bezeichnet wird,

$$w' = 2K - \int_0^z \frac{dz}{\Delta(z,k)},$$

während

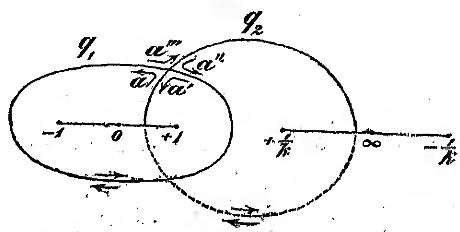
$$w = \int_0^z \frac{dz}{\Delta(z,k)}$$

war, und man erhält

$$w + w' = 2K.$$

Nimmt man das Integral $\int dw$ längs einer geschlossenen Linie, welche alle vier Verzweigungspunkte umgiebt, so verläuft eine solche

Fig. 60.




ganz im ersten Blatte und bildet daher für sich allein eine vollständige Begrenzung. Demnach hat dies Integral den Werth Null. Verengert man diese Linie bis zur Hauptaxe, auf welcher die vier Verzweigungspunkte liegen, so zerlegt sich das Integral in folgende

Theile (die Linie möge in der Richtung der abnehmenden Winkel durchlaufen werden):

1) Von $-1$ bis $+1$; 2) von $+1$ bis $+\frac{1}{k}$; 3) von $+\frac{1}{k}$ durch $\infty$ bis $-\frac{1}{k}$;

6) von $+1$ bis $-1$; 5) von $+\frac{1}{k}$ bis $+1$; 4) von $-\frac{1}{k}$ durch $\infty$ bis $+\frac{1}{k}$.

Dabei ist die Quadratwurzel in 6) und 4) negativ zu nehmen, weil bei diesen der Integrationsweg auf der rechten Seite der Verzweigungsschnitte $(-1, +1)$ und $(+\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})$ liegt, in allen übrigen positiv. Demnach heben sich 2) und 5) auf, und 1) und 3) werden verdoppelt. Da ferner

$$1) = 2\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z,k)} \qquad 3) = 2\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)}$$

ist, so erhält man

$$\int_0^1 \frac{dz}{\Delta(z,k)} + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = 0,$$

und daher

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = -K.$$

Hieraus folgt auch der Werth des Integrals zwischen den Grenzen 0 und $\infty$, denn da dieses sich in die Theile $0 \ldots 1$, $1 \ldots \frac{1}{k}$, $\frac{1}{k} \ldots \infty$ zerlegt, so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = K - iK' - K = -iK',$$

oder da man diesem Werthe den Periodicitätsmodul $2iK'$ hinzufügen kann, auch

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\Delta(z,k)} = iK'.$$

Innerhalb des Parallelogramms mit den Ecken $0$, $4K$, $4K + 2iK'$ und $2iK'$ wird also $z$ unendlich für $w = iK'$ und $w = 2K + iK'$.

Wir wollen auch hier nach *Riemann* die Beziehung zwischen der doppelt periodischen Function und dem elliptischen Integral in umgekehrter Weise, nämlich von der doppelt periodischen Function ausgehend, betrachten. Sei $\varphi(w)$ eine einwerthige doppelt periodische Function, also von der Eigenschaft, dass zugleich

$$\varphi(w + A_1) = \varphi(w) \quad \text{und} \quad \varphi(w + A_2) = \varphi(w)$$

sei. Dann müssen die geraden Linien, welche die complexen Grössen $A_1$ und $A_2$ darstellen, verschiedene Richtung haben. Denn haben sie gleiche Richtung, so müssen $A_1$ und $A_2$ (nach § 2. 3) ein reelles Verhältniss besitzen. Dieses kann entweder rational oder irrational sein. Ist es rational, so sind $A_1$ und $A_2$ commensurabel und daher Vielfache einer und derselben Grösse $B$. Man kann also setzen

$$A_1 = mB \qquad A_2 = nB,$$

wo $m$ und $n$ zwei ganze Zahlen bedeuten, die relative Primzahlen zu einander sind, und hat dann

$$\varphi(w) = \varphi(w + mB) = \varphi(w + nB).$$

Da es nun in diesem Falle zwei ganze Zahlen $a$ und $b$ giebt, für welche

$$ma - nb = 1,$$

und da ausserdem

$$\varphi(w + maB - nbB) = \varphi(w)$$

ist, so ist auch

$$\varphi(w + B) = \varphi(w),$$

und daher ist die Function $\varphi(w)$ in diesem Falle einfach und nicht doppelt periodisch. Haben aber $A_1$ und $A_2$ ein reelles irrationales Verhältniss, sodass sie incommensurabel sind, so giebt es stets zwei ganze Zahlen $m$ und $n$, für welche der Modul von

$$mA_1 + nA_2$$

kleiner als eine noch so klein angenommene Grösse wird.*) Da nun auch

---

*) Setzt man $\frac{A_2}{A_1} = \alpha$, so ist $\alpha$ der Annahme nach reell und irrational. Entwickelt man den absoluten Werth $(\alpha)$ von $\alpha$ in einen Kettenbruch und bezeichnet mit $\frac{\mu}{\nu}$ und $\frac{\mu'}{\nu'}$ zwei auf einander folgende Näherungsbrüche desselben, so ist bekanntlich dem absoluten Werthe nach

$$\left(\frac{\mu}{\nu} - (\alpha)\right) < \frac{1}{\nu\nu'},$$

und daher

$$(\mu - \nu(\alpha)) < \frac{1}{\nu'}.$$

Da aber die Nenner der Näherungsbrüche unaufhörlich wachsen, so kann

$$\varphi\,(w + mA_1 + nA_2) = \varphi\,(w)$$

ist, so behält jetzt die Function $\varphi\,(w)$ bei beliebig kleinen Aenderungen der Variablen denselben Werth und ist daher eine Constante. Demnach muss bei einer doppelt periodischen Function das Verhältniss der beiden Periodicitätsmoduln imaginär sein, also müssen die Geraden $A_1$ und $A_2$ verschiedene Richtung haben. Dann aber kann man die Ebene der $w$ durch zwei Schaaren paralleler Linien in Parallelogramme theilen, sodass $\varphi\,(w)$ auf je zwei Parallelen dieselben Werthe erhält; sie nimmt dann ferner in jedem Parallelogramm ihre sämmtlichen Werthe an und hat in je zwei entsprechenden Punkten verschiedener Parallelogramme gleiche Werthe.

Da nun die eindeutige Function $\varphi\,(w)$ für irgend einen Werth von $w$ unendlich gross werden muss (§ 28), so muss sie in jedem Parallelogramm unendlich gross werden. Heben wir daher irgend ein Parallelogramm heraus (Fig. 62), und seien $r$, $r'$, $r''$, etc. die Punkte desselben, in welchen $\varphi\,(w)$ unendlich gross wird. Bildet man das Integral

$$\int \varphi\,(w)\,dw,$$

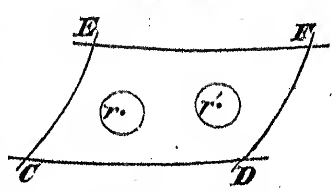
längs der Begrenzung des Parallelogramms genommen, so ist dasselbe (nach § 19) gleich der Summe der Integrale um die Unstetigkeitspunkte $r$, $r'$, $r''$, etc. Wird also $\varphi\,(w)$ in diesen Punkten unendlich, wie resp.

$$\frac{c}{w-r} + \cdots,\quad \frac{c'}{w-r'} + \cdots,\quad \frac{c''}{w-r''} + \cdots,\ \text{etc.},$$

so ist

$$\int \varphi\,(w)\,dw = 2\pi i\,(c + c' + c'' + \cdots).$$

Fig. 62.




Nun hat aber $\varphi\,(w)$ auf der Seite $CE$ dieselben Werthe wie auf $DF$ und auf $CD$ dieselben wie auf $EF$, und beim Durchlaufen der Begrenzung des Parallelogramms werden die parallelen Seiten in entgegengesetzter Richtung durchlaufen; die Integrale längs dieser Seiten heben sich daher auf, und es ist

man diesen Ausdruck, wenn die Entwickelung hinreichend weit fortgesetzt wird, so klein machen, als man will. Nun ist

$$mA_1 + nA_2 = A_1\,(m + n\alpha);$$

nimmt man daher $m = \mu$ und $n = \mp\nu$, je nachdem $(\alpha) = \pm\alpha$ ist, so kann man $m + n\alpha$ und also auch den Modul von $mA_1 + nA_2$ so klein machen, als man will.

$$\int \varphi(w)\, dw = 0.$$

Folglich ist auch

$$c + c' + c'' + \cdots = 0.$$

Hieraus geht hervor, dass $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm mehr als einmal unendlich werden muss, und zwar mindestens entweder in zwei Punkten von der ersten Ordnung oder in einem Punkte von der zweiten Ordnung. Bezeichnet im Allgemeinen $n$ die Anzahl, wie oft $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm unendlich gross wird, so kann zunächst gezeigt werden, dass $\varphi(w)$ auch jeden Werth $h$ innerhalb eines Parallelogramms $n$ Mal annehmen muss. Dazu betrachten wir das Integral

$$\int d \log (\varphi(w) - h) \text{ oder } \int \frac{\varphi'(w)\, dw}{\varphi(w) - h},$$

ausgedehnt auf die Begrenzung des Parallelogramms. Auch dieses hat den Werth Null, weil sowohl $\varphi(w) - h$ als auch $\varphi'(w)$ auf den gegenüberliegenden Seiten gleiche Werthe haben. Andrerseits aber ist dieses Integral auch gleich der Summe der Integrale, um die Punkte, für welche $\varphi'(w)$ unendlich gross wird, und um die, in welchen $\varphi(w) - h$ verschwindet. Die ersteren sind dieselben wie die, für welche $\varphi(w)$ oder $\varphi(w) - h$ unendlich wird (§ 29). Ist nun im Allgemeinen $\alpha$ ein Punkt, für welchen $\varphi(w) - h$ entweder unendlich klein oder unendlich gross wird, und zwar von der $p$ten Ordnung ($p$ positiv beim unendlich klein Werden), so kann man setzen (§ 34)

$$\varphi(w) - h = (w - \alpha)^p\, \psi(w),$$

wo $\psi(w)$ für $w = \alpha$ weder Null noch unendlich ist, und erhält

$$\int d \log (\varphi(w) - h) = p \int \frac{dw}{w - \alpha} + \int \frac{\psi'(w)\, dw}{\psi(w)}$$
$$= 2\pi i p.$$

Auf das ganze Parallelogramm ausgedehnt ist also

$$\int d \log (\varphi(w) - h) = 2\pi i \Sigma p,$$

und daher

$$\Sigma p = 0.$$

Nun wird $\varphi(w) - h$, wie $\varphi(w)$, $n$ Mal unendlich gross; bezeichnet man mit $m$ die Anzahl, wie oft es verschwindet, so ist

$$\Sigma p = m - n = 0,$$

und daher

$$m = n.$$

Da also $(\varphi(w) - h)$ $n$ Mal verschwinden muss, so wird $\varphi(w)$ auch $n$ Mal $= h$.

Wir betrachten nun im Folgenden nur den einfachsten Fall, wo $\varphi(w)$ in jedem Parallelogramm zwei Mal unendlich gross wird, also auch jeden Werth zwei Mal annimmt, und setzen zuerst voraus, $\varphi(w)$ werde in zwei Punkten $r$ und $s$ unendlich gross von der ersten Ordnung. Dann kann man setzen, $\varphi(w)$ mit $z$ bezeichnet,

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{w-r} + \frac{c'}{w-s} + \psi(w),$$

und weil

$$c + c' = 0$$

sein muss,

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{w-r} - \frac{c}{w-s} + \psi(w), \tag{39}$$

wo $c$ eine gegebene Constante bezeichne, und $\psi(w)$ eine Function, die in dem betrachteten Parallelogramm nicht mehr, also nur noch in den anderen Parallelogrammen, nämlich in den Punkten $r + mA_1 + nA_2$; $s + mA_1 + nA_2$ (für $m$ und $n$ alle positiven und negativen ganzen Zahlen gesetzt) unendlich wird. Wir suchen nun zuerst die Beziehung zwischen den beiden Werthen $w$ auf, für welche $\varphi(w)$ gleiche Werthe erhält. Zu dem Ende sei

$$v = r + s - w.$$

Setzt man in (39) $v$ statt $w$, so ist

$$\varphi(v) = \frac{c}{v-r} - \frac{c}{v-s} + \psi(v).$$

Da man aber

$$v - r = -(w - s)$$
$$v - s = -(w - r)$$

hat, so folgt

$$\varphi(v) = -\frac{c}{w-s} + \frac{c}{w-r} + \psi(v),$$

und daher

$$\varphi(w) - \varphi(v) = \psi(w) - \psi(v).$$

Diese Differenz bleibt also in dem ersten Parallelogramme endlich. Nun wird in einem anstossenden Parallelogramme $\varphi(w)$ unendlich gross in $w = r + A_1$ und $w = s + A_1$; man kann daher auch setzen

$$\varphi(w) = \frac{c_1}{w-r-A_1} - \frac{c_1}{w-s-A_1} + \psi_1(w),$$

wo jetzt $\psi_1(w)$ für alle Punkte des zweiten Parallelogrammes endlich bleibt. Führt man nun

ein, so ist

$$v_1 = r + s + 2A_1 - w$$

$$w - r - A_1 = -(v_1 - s - A_1)$$
$$w - s - A_1 = -(v_1 - r - A_1),$$

und daher hat man auch

$$\varphi(v_1) = -\frac{c_1}{w - s - A_1} + \frac{c_1}{w - r - A_1} + \psi_1(v_1).$$

Demnach ist

$$\varphi(w) - \varphi(v_1) = \psi_1(w) - \psi_1(v_1)$$

und bleibt innerhalb des zweiten Parallelogramms endlich. Da aber $v_1$ sich von $v$ nur um das Doppelte des Periodicitätsmoduls $A_1$ unterscheidet, so ist

$$\varphi(v_1) = \varphi(v),\ \varphi(w) - \varphi(v_1) = \varphi(w) - \varphi(v),$$

und daher bleibt die Differenz

$$\varphi(w) - \varphi(v)$$

sowohl in dem ersten, als auch in dem zweiten Parallelogramm endlich. Geht man auf diese Weise von Parallelogramm zu Parallelogramm fort, so zeigt sich, dass diese Differenz in keinem Parallelogramme, also gar nicht unendlich wird und daher constant sein muss. Um den Werth dieser Constanten zu ermitteln, setze man $w = \frac{r+s}{2}$, dann wird

$$v = \frac{r+s}{2} = w,$$

und da die Function $\varphi$ einwerthig ist, auch

$$\varphi(v) = \varphi(w).$$

Da also die Differenz $\varphi(w) - \varphi(v)$ für einen Werth von $w$ den Werth Null hat, so hat sie diesen stets, und daher ist

$$\varphi(r + s - w) = \varphi(w).$$

Demnach sind $w$ und $r + s - w$ die beiden zusammengehörigen Werthe, für welche die Function $\varphi(w)$ gleiche Werthe erhält.

Nun folgt aus (39)

$$\varphi'(w) = \frac{dz}{dw} = -\frac{c}{(w-r)^2} + \frac{c}{(w-s)^2} + \psi'(w);$$

also ist die Derivirte $\varphi'(w)$, abgesehen von den Periodicitätsmoduln, auch nur für $w = r$ und $w = s$ unendlich gross, aber von der zweiten Ordnung. Sie wird daher in jedem Parallelogramme vier Mal unendlich und nimmt also auch jeden Werth vier Mal an. Sie ist ebenfalls eine einwerthige Function von $w$; wichtig aber ist es zu untersuchen, ob sie auch eine einwerthige Function von $z$ ist. Nun erhält die Derivirte $\frac{dz}{dw}$ in je zwei entsprechenden Punkten

verschiedener Parallelogramme, in denen $z$ gleiche Werthe hat, ebenfalls gleiche Werthe. Man hat also nur die Punkte $v$ und $w$ desselben Parallelogramms zu betrachten. Differentiirt man die Gleichung

$$\varphi(w) = \varphi(v)$$

nach $w$, so erhält man, da

$$\frac{dv}{dw} = -1$$

ist,

$$\varphi'(w) = -\varphi'(v).$$

Demnach erhält zwar $z$ für $v$ und $w$ gleiche Werthe, $\frac{dz}{dw}$ aber entgegengesetzte, also ist $\frac{dz}{dw}$ nicht eine einwerthige Function von $z$, da es für denselben Werth von $z$ zwei verschiedene Werthe annehmen kann. Da aber diese gleich und entgegengesetzt sind, so folgt, dass $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Function von $z$ ist. Nun wird $\frac{dz}{dw}$ nur da unendlich, wo auch $z$ unendlich ist, und zwar von der zweiten Ordnung, wo $z$ von der ersten Ordnung unendlich ist; demnach wird $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ an derselben Stelle von der vierten Ordnung unendlich; also ist $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Function von $z$, welche nur für $z = \infty$ und hier von der vierten Ordnung unendlich wird, und folglich eine ganze Function vierten Grades von $z$. Eine solche wird auch 4 Mal Null. Bezeichnet man die Werthe von $z$, für welche dies geschieht, mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, und mit $C$ eine Constante, so ist

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = C(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta), \tag{40}$$

und hieraus folgt

$$w = \int \frac{dz}{\sqrt{C(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}}.$$

Eine doppelt periodische Function, welche in jedem Parallelogramm zwei Mal von der ersten Ordnung unendlich wird, ist daher die inverse Function eines elliptischen Integrals. Die Constante $C$ kann durch $c$ ausgedrückt werden. Denn da nach (40)

$$C = \left[\lim \frac{\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}{z^4}\right]_{z=\infty}$$

ist, so erhält man

$$C = \left[ \lim \frac{\left[ -\frac{c}{(w-r)^2} + \frac{c}{(w-s)^2} + \psi'(w) \right]^2}{\left[ \frac{c}{w-r} - \frac{c}{w-s} + \psi(w) \right]^4} \right]_{w=r}$$

$$= \lim \frac{\left[ -c + \frac{c\,(w-r)^2}{(w-s)^2} + (w-r)^2 \psi'(w) \right]^2}{\left[ c - \frac{c\,(w-r)}{w-s} + (w-r)\,\psi(w) \right]^4}$$

$$= \frac{c^2}{c^4} = \frac{1}{c^2},$$

und dadurch wird

$$w = \int \frac{c\,dz}{\sqrt{(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)\,(z-\delta)}}.$$

Dieses Integral gestattet eine ganz ähnliche Behandlung wie das frühere

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2 z^2)}},$$

indem hier an Stelle von $+1$, $-1$, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$ die vier Verzweigungspunkte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ treten; es kann auch durch eine Transformation in das letztere übergeführt werden.

Wir gehen nun zu dem Falle über, wo die Function $\varphi(w)$ nur in einem Punkte $w = r$ und hier von der zweiten Ordnung unendlich wird. In diesem Falle muss man setzen

$$z = \varphi(w) = \frac{c}{(w-r)^2} + \psi(w);$$

denn das in $(w-r)^{-1}$ multiplicirte Glied muss fehlen, damit $\int \varphi(w)\,dw$ ausgedehnt auf die Begrenzung des Parallelogramms gleich Null werde. Man schliesst hier ebenso wie oben, indem man $s = r$ setzt, dass

$$\varphi(2r - w) = \varphi(w)$$

und daher

$$\varphi'(2r - w) = -\varphi'(w)$$

ist. Daher ist $\frac{dz}{dw}$ nicht, wohl aber wieder $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ eine einwerthige Function von $z$; nun ist

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{2c}{(w-r)^3} + \psi'(w),$$

also wird $\frac{dz}{dw}$ nur da unendlich, und zwar von der 3ten Ordnung,

wo $z$ von der zweiten Ordnung unendlich ist. In Beziehung auf $z$ ist also $\frac{dz}{dw}$ für $z = \infty$ von der Ordnung $\frac{3}{2}$ unendlich, und folglich $\left(\frac{dz}{dw}\right)^2$ von der dritten Ordnung. Demnach hat man in diesem Falle

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = C\,(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma).$$

Darin ist

$$C = \left[\lim \frac{\left(\frac{dz}{dw}\right)^2}{z^3}\right]_{z=\infty} = \left|\lim \frac{\left(-\frac{2c}{(w-r)^3} + \psi'(w)\right)^2}{\left(\frac{c}{(w-r)^2} + \psi(w)\right)^3}\right|_{w=r}$$

$$= \lim \frac{(-2c + (w-r)^3\,\psi'(w))^2}{(c + (w-r)^2\,\psi(w))^3} = \frac{4c^2}{c^3} = \frac{4}{c}\,;$$

mithin

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^2 = \frac{4}{c}\,(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)$$

und

$$w = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{c}\cdot dz}{\sqrt{(z-\alpha)\,(z-\beta)\,(z-\gamma)}},$$

welches ebenfalls ein elliptisches Integral ist.

Hiemit brechen wir diese Betrachtungen ab, da es nicht in der Absicht dieses Buches liegt, näher auf die Untersuchung der periodischen Functionen einzugehen, sondern die behandelten Fälle nur als Beispiele zur Erläuterung der allgemeinen Betrachtungen angesehen werden sollen. In Betreff der eigenthümlichen Natur, welche denjenigen Functionen innewohnt, die mehr als zwei Periodicitätsmoduln besitzen, möge auf die schöne und lichtvoll geschriebene Abhandlung von *Prym*: Theoria nova functionum ultraellipticarum (Inaug. Diss.) Berlin 1868*) verwiesen werden.

*) Mit Hinzufügung eines zweiten Theiles deutsch herausgegeben unter dem Titel: Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen. Separatabdruck aus den Denkschriften der Acad. d. Wiss. zu Wien. Bd. 24 der math.-naturw. Classe.

# Aus der Vorrede zur ersten Auflage.

Seit der Einführung der complexen Variabeln in die Functionenlehre und namentlich seit den grossen Schöpfungen *Riemann's* scheint sich ein Umschwung in der Mathematik vorzubereiten, der zwar zunächst die reine Mathematik berührt, aber wohl auch in nicht ferner Zeit auf die physikalischen Wissenschaften und die angewandte Mathematik überhaupt von Einfluss sein wird. Daher schien es mir im höchsten Grade wünschenswerth zu sein, dass diese Lehren so bald als möglich eine zusammenhängende Darstellung finden möchten. Indem ich nun eine Bearbeitung wenigstens der Elemente dieser Theorie unternahm, verhehlte ich mir keineswegs die grossen Schwierigkeiten, welche mit einem solchen Unternehmen verbunden sind; aber bei der Wichtigkeit der Sache, und weil hier wohl entschieden ein Bedürfniss vorlag, glaubte ich, dass Zögern nicht am Platze sei, und knüpfte zugleich an die Herausgabe dieses Buches die Hoffnung, dass sich durch diesen ersten Versuch Andere angeregt fühlen möchten, dieser Aufgabe ihre Kräfte zuzuwenden. —

In Beziehung auf die Anordnung des Stoffes glaube ich wegen zweier Stellen etwas bemerken zu müssen. Die erste bildet den § 21. Man bedarf zur Entwicklung der allgemeinen Eigenschaften der Functionen eigentlich nur des Satzes, dass

wenn eine Function $\varphi(z)$ in einem Punkte $a$ so unendlich wird, dass $(z - a)\,\varphi(z)$ sich einem endlichen Grenzwerthe $p$ nähert, das um diesen Punkt genommene Integral $\int \varphi(z)\,dz = 2\pi i p$ ist. Da es mir aber schien, dass es für den Leser von Interesse sein müsste, gleich hier zu erfahren, was sich über das erwähnte Integral sagen lässt, wenn es um einen Verzweigungspunkt genommen wird, so habe ich, obgleich die vollständige Bestimmung der Werthe von Integralen, welche sich auf geschlossene Linien erstrecken, erst viel später erledigt werden kann, doch jene Betrachtung gleich im § 21 angeschlossen. Die zweite Bemerkung bezieht sich auf Abschnitt V. In diesem ist der Logarithmus und die Exponentialfunction behandelt. Nun war es allerdings nothwendig, an dieser Stelle etwas über den Logarithmus zu sagen, weil später von dessen Eigenschaften Gebrauch gemacht wird, indessen hätte dies ziemlich kurz abgemacht werden können. Es schien mir aber zweckmässiger, diesen Abschnitt etwas vollständiger zu behandeln, obgleich dadurch den Betrachtungen über Querschnitte und Periodicitätsmoduln vorgegriffen wird, einmal, weil dadurch die Natur jener beiden Functionen in ein viel helleres Licht tritt, und dann, weil diese specielle Untersuchung gerade geeignet erscheint, für jene späteren Betrachtungen die Vorstellungen zu fixiren.

Prag, den 10. October 1864.

# Vorrede zur zweiten Auflage.

Die vorliegende neue Auflage hat gegenüber der ersten mannigfaltige Veränderungen erfahren; insbesondere wurde der IX. Abschnitt über einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen vollständig umgestaltet. Der XI. Abschnitt über Bestimmung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen blieb fort, und die früher in dem letzten Abschnitte enthaltenen Sätze zur Bestimmung der Ordnung des Zusammenhanges einer gegebenen Fläche wurden, ohne die Abbildung durch eine Kreisfläche zu Hülfe zu nehmen, abgeleitet und so dem IX. Abschnitte einverleibt.

Anfänglich war noch die Hinzufügung von Anwendungen beabsichtigt, aber im Hinblick auf die seitdem erschienenen Werke, insbesondere *C. Neumann:* Vorlesungen über *Riemann's* Theorie der Abel'schen Integrale, *J. Thomae:* Abriss einer Theorie der complexen Functionen etc. und andere, sowie auf das in den Mittheilungen der *B. G. Teubner*'schen Verlagsbuchhandlung 1873, Nr. 1 angekündigte Buch von *Königsberger:* Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, wurde sie schliesslich unterlassen.

Prag, im September 1873.

**H. Durège.**